ESTADÍSTICA EN UN ENTORNO DE SUSTENTABILIDAD

Autores

JUDITH JOSEFINA GARCÍA BOLÍVAR

RUBÉN DARÍO MUJICA BETANCOURT

JORGE IVÁN MINA ORTEGA

2019

ESTADÍSTICA EN UN ENTORNO DE SUSTENTABILIDAD

Autores

JUDITH JOSEFINA GARCÍA BOLÍVAR

RUBÉN DARÍO MUJICA BETANCOURT

JORGE IVÁN MINA ORTEGA

2019

ESTADÍSTICA EN UN ENTORNO DE SUSTENTABILIDAD

Dr. Hugo Ruiz Enríquez
RECTOR
Universidad Politécnica Estatal del Carchi

Autores
Judith Josefina García Bolívar
Rubén Darío Mujica Betancourt
Jorge Iván Mina Ortega

Libro revisado por:
Este libro fue validado por revisores, bajo la modalidad doble - ciego

ISBN: 978-9942-914-68-2
DOI: 10.32645/9789942914682

Primera Edición diciembre 2019
Tiraje: 300
Libros.upec.edu.ec
Sección Publicaciones

UPEC-CP-LIBP-2019-007

Diseño y diagramación:
Lcdo. Felipe Martínez
Comisión de Publicaciones

Editorial

MICROCURRICULUM DE LOS AUTORES

JUDITH JOSEFINA GARCÍA BOLÍVAR

PhD en Ciencias Agrícolas en la Universidad Central de Venezuela. Pregrado en Ingeniería Agrícola y Magíster Scientiarum en Ciencias por la Universidad del Estado de Kansas. Docente en Estadística y Diseño de Experimentos en la Universidad Central de Venezuela, período 1995-2015. Actualmente docente titular de la Universidad Politécnica Estatal del Carchi (UPEC) en Ecuador desde 2015. Autora de 27 artículos. Coordinadora del Grupo de investigación Sociedad Sustentable en la UPEC.

RUBÉN DARÍO MUJICA BETANCOURT

PhD en Educación en la Universidad Nacional Experimental Rafael María Baralt, Venezuela. Magíster Scientiarum en Gerencia de Calidad y Productividad (Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda, Venezuela). Ingeniero Industrial (Universidad del Zulia, Venezuela). Docente Asociado TC en la Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda - UNEFM (Venezuela) periodo 2004 – 2016. Docente Ocasional TC en la FCIIAEE de la Universidad Politécnica Estatal del Carchi – UPEC desde 2016. Experto en Educación Virtual, Experto en Tecnología Educativa, Experto en Plataformas E-learning y Experto en Entornos Educativos 3D (Fundación para la actualización tecnológica de Latinoamérica, FATLA).

JORGE IVÁN MINA ORTEGA

PhD en Educación en la Universidad Católica Andrés Bello de Venezuela. Magíster en Procesamiento de Alimentos por la Universidad Agraria del Ecuador. Magíster en Educación y Desarrollo Social por la Universidad Tecnológica Equinoccial. Diplomado Superior en currículo por la Universidad Técnica de Ambato. Ingeniero Agroindustrial por la Universidad Técnica del Norte. Actualmente se desempeña como Decano de la Facultad de Industrias Agropecuarias y Ciencias Ambientales y docente titular de la Universidad Politécnica Estatal del Carchi.

ÍNDICE

Introducción..7

CAPÍTULO 1. Estadística descriptiva con aplicaciones a la economía....................................12
razones para estudiar estadística..12
Tipos de estadísticas..12
Población..12
Muestra..12
Variables...14
Parámetro...14
Estadístico..14
Etapas para realizar el análisis de datos...14
Recopilación de datos..15
Presentación de datos...15
Tablas de distribución de frecuencias...15
Histograma de frecuencia...19
Diagrama de tallo y hojas...19
Diagramas de caja..20
Escalas de medidas 21
Medidas de tendencia central..22
Medidas de dispersión..25
Ejercicios propuestos..28
Ejercicios resueltos...31
Autoevaluación 1...49

CAPÍTULO 2. Probabilidades con aplicaciones en ingeniería en alimentos..............................50
Conceptos básicos..50
Modelo...50
Fenómeno aleatorio..50
Propiedades de un experimento aleatorio...51
Espacio muestral..51
Evento o suceso aleatorio..51
Tipos de eventos..52
Teoría combinatoria..54
Variaciones..54
Combinaciones...55
Definición axiomática de probabilidad..57
Reglas de adición de probabilidades...58
Reglas de multiplicación de probabilidades...59
Ejercicios propuestos..62
Ejercicios resueltos...67
Autoevaluación 2...71

CAPÍTULO 3. Variables aleatorias con aplicaciones en el área de salud................................72
Conceptos básicos..72
Función de probabilidad en variables aleatorias discretas..72
Distribución de probabilidad..72
Distribución acumulativa...72
Valor esperado de una variable aleatoria discreta...73
Varianza de una variable aleatoria discreta..74

Variables aleatorias bidimensionales discretas....75
Condiciones....75
Distribuciones marginales de Probabilidad....75
Momentos y funciones generadoras de momentos....75
Caracterización de la Asimetría....75
Caracterización de la Curtosis....76
Covarianza....76
Coeficiente de correlación....76
Distribución de probabilidad en variables aleatorias contínuas....78
Ejercicios propuestos....82
Ejercicios resueltos....88
Autoevaluación 3....94

CAPÍTULO 4. Variables aleatorias discretas con aplicaciones a la ingeniería industrial....95
Conceptos básicos....95
Distribución binomial....95
Distribución de poisson....99
Ejercicios propuestos....103
Ejercicios resueltos....106
Autoevaluación 4....108

CAPÍTULO 5. Variables aleatorias continuas con aplicaciones en Ingeniería electrica y mecánica....109
Distribución normal....109
Distribución probabilistica....109
Aproximación de la distribución binomial a la normal....110
Ejercicios propuestos....115
Ejercicios resueltos....118
Autoevaluación 5....123

CAPÍTULO 6. Estimaciones puntuales y por intervalo con aplicaciones en educación....124
Parámetro....124
Estadístico....124
Estimación....124
Características deseables de un estimador....125
Estimador insesgado....125
Varianza de un estimador....125
Tipos de estimación....126
Estimación puntual....126
Estimación por intervalos....127
Intervalo de confianza para la media de una población con varianza conocida....127
Intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales con varianzas conocidas....129
Intervalo de confianza para la media de una población con varianza desconocida....130
Intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales con varianzas desconocidas pero iguales....131
Intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales con varianzas desconocidas y diferentes....132
Intervalo de confianza para la varianza de una población....133
Intervalo de confianza para el cociente de dos varianzas poblacionales....134

Intervalo de confianza para la proporción de una población..135
Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones poblacionales..............................136
Ejercicios propuestos..138
Ejercicios resueltos..143
Autoevaluación 6..148

CAPÍTULO 7. Pruebas de hipótesis con aplicaciones en jurisprudencia.................................149
conceptos básicos...149
Prueba de hipótesis sobre la media de una población con varianza conocida.........................156
Prueba de hipótesis sobre la igualdad de dos medias poblacionales con varianzas conocidas...156
Prueba de hipótesis sobre la media de una población con varianza desconocida..157
Prueba de hipótesis sobre la igualdad de dos medias poblacionales con varianzas desconocidas pero iguales...157
Prueba de hipótesis sobre la igualdad de dos medias poblacionales con varianzas desconocidas y diferentes..158
Prueba de hipótesis sobre la varianza de una población...158
Prueba de hipótesis sobre la igualdad de dos varianzas poblacionales..................................159
Prueba de hipótesis sobre la proporción de una población...159
Prueba de hipótesis sobre la igualdad de dos proporciones poblacionales 160
Ejercicios propuestos..168
Ejercicios resueltos..171
Autoevaluación 7..174

Bibliografía consultada...175

ANEXO 1. Distribuciones de muestreo...176
Distribución de Muestreo de la media aritmética..176
Distribución de Muestreo de la varianza muestral cuando proviene de una población con distribución normal..178
Distribución de Muestreo de la Media Aritmética cuando proviene de una población con distribución normal y con varianza desconocida...179
Distribución de Muestreo de la Razón de dos varianzas a partir de distribuciones normales.......181

ANEXO 2. Tablas estadísticas
Tabla A. Valores de la distribución acumulativa binomial..184
Tabla B. Valores de la distribución acumulativa de poisson..194
Tabla C. Valores de la distribución acumulativa normal estándar 198
Tabla D. Valores de cuantiles de la distribución t de Student 199
Tabla E. Valores de cuantiles de la distribución Chi cuadrada 200
Tabla F. Valores de cuantiles de la distribución F...201

INTRODUCCIÓN

La Estadística es una sola; sin embargo, su aplicación abarca muchos ámbitos. Muchas personas utilizan la estadística para analizar datos y tomar decisiones en negocios, salud, industrias, educación y muchas otras áreas. Así, el uso de la estadística no presenta límites, haciéndola clave para alcanzar el desarrollo sustentable dentro de un país; evitando dejar cargas económicas, sociales y ecológicas a generaciones futuras.

Las razones que justifican el uso de métodos estadísticos son; en primer lugar, se vislumbra como una forma de presentar e interpretar grandes volúmenes de información de forma resumida y con validez científica. En segundo lugar, la naturaleza de las observaciones es estocástica en la mayoría de las ciencias observacionales; están sujetas a errores accidentales provenientes ya sea de los métodos de observación y/o de la inexactitud de los instrumentos de medida.

Por esta razón, es importante garantizar su enseñanza dentro de la educación superior, puesto que esta ciencia es transcendental a la hora de conocer aspectos ligados al desarrollo del país, sea esto dentro del ámbito social, cultural, ambiental y de recursos, tomando en cuenta que estos aspectos son el punto de partida para investigaciones que pueden proponer soluciones para enfrentar cualquier incertidumbre. Este libro es una potencial herramienta que tiene por objetivo ofrecer a los usuarios un conocimiento profundo de la estadística aplicada a las ciencias con una visión sustentable.

La sustentabilidad se fundamenta en la práctica para lograr un equilibrio social, económico y ambiental que se sostenga en el tiempo y a la vez genere una alta calidad de vida para las personas. Por tal motivo, se creó la necesidad de elaborar un texto que contemple el ámbito de la sustentabilidad en vista de los grandes cambios que está experimentando el planeta, considerando que la estadística permite obtener indicadores muy relevantes para su estudio.

El libro está estructurado en siete capítulos cada uno se ajustó a alguno de los 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) que las Naciones Unidas ha puesto en marcha con su resolución 66/288 de 2012, el cual es un proceso destinado a definir unos Objetivos de Desarrollo Sostenible o Sustentable (ODS) capaces de orientar la necesaria transición a la Sustentabilidad que, de cumplirse, aunque sea parcialmente, mejoraría considerablemente muchos de los males que se encuentran actualmente. (UN, G.A. 2015). Los 17 ODS mencionados y ampliados con una pequeña explicación son:

1. Fin de la Pobreza: poner fin a la pobreza en todas sus formas en todo el mundo.
2. Hambre Cero: poner fin al hambre, lograr la seguridad alimentaria y la mejora de la nutrición y promover la agricultura sostenible.
3. Salud y Bienestar: garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos en todas las edades.
4. Educación de calidad: garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos.
5. Igualdad de Género: lograr la igualdad entre los géneros y empoderar a todas las mujeres y las niñas.
6. Agua Limpia y Saneamiento: garantizar la disponibilidad de agua y su gestión sostenible y el saneamiento para todos.
7. Energía Libre y no Contaminante: garantizar el acceso a una energía asequible, segura, sostenible y moderna para todos.

8. Trabajo Decente y Crecimiento Económico: promover el crecimiento económico sostenido, inclusivo y sostenible, el empleo pleno y productivo y el trabajo decente para todos.
9. Industria, Innovación e Infraestructura: construir infraestructuras resilientes, promover la industrialización inclusiva y sostenible y fomentar la innovación.
10. Reducción de las Desigualdades: reducir la desigualdad en y entre los países.
11. Ciudades y Comunidades Sostenibles: lograr que las ciudades y los asentamientos humanos sean inclusivos, seguros, resilientes y sostenibles.
12. Producción y Consumo Responsable: garantizar modalidades de consumo y producción sostenibles.
13. Acción por el Clima: adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos.
14. Vida Submarina: conservar y utilizar en forma sostenible los océanos, los mares y los recursos marinos para el desarrollo sostenible.
15. Vida de Ecosistemas terrestres: gestionar sosteniblemente los bosques, luchar contra la desertificación, detener e invertir la degradación de las tierras y detener la pérdida de biodiversidad.
16. Paz, Justicia e Instituciones Sólidas: promover sociedades, justas, pacíficas e inclusivas.
17. Alianzas para lograr los Objetivos: revitalizar la Alianza Mundial para el Desarrollo Sostenible.

El primer capítulo trata sobre la Estadística Descriptiva con aplicaciones a la Economía, vinculado con el objetivo 8 del Desarrollo Sostenible establecido por la ONU que promueve el crecimiento económico sostenido, inclusivo y sostenible, el empleo pleno y productivo y el trabajo decente para todos. La estadística se encarga de recolectar, organizar, presentar, analizar e interpretar datos numéricos para ayudar a tomar mejores decisiones mediante la probabilidad de ocurrencia de ciertos hechos por lo que se requieren de métodos y técnicas que permitan analizar la economía sectorial, laboral, las finanzas públicas, políticas económicas, economía empresarial, al encontrarnos en un mundo basado en cifras que hay que analizar: población económicamente activa, índices de precios, utilidades, tasa de inflación, gasto familiar, mercados bursátiles, Producto Interior Bruto (PIB), entre otros.

Mediante la utilización de las principales técnicas para el análisis de datos cuantitativos tales como: las medidas descriptivas numéricas que abarcan las medidas de tendencia central, dispersión y forma, el uso de tablas de distribución de frecuencias, gráficos, entre otros, todo ello aplicado a la economía. Estos constituyen instrumentos de investigación, logrando así la posibilidad de emplearlos para la verificación de hipótesis sobre un determinado comportamiento de los individuos o de la sociedad, y establecer una alternativa lógica al proceso de investigación económica, por lo que es de gran utilidad pues radica en poder sacar conclusiones con un nivel de riesgo establecido, a través del análisis de una muestra.

Además, la estadística viene a ser un instrumento de vital importancia para conocer el comportamiento de la economía a diferentes niveles ya sea de una organización, municipio, provincia, país, así como a nivel internacional. En esta difícil tarea, el economista se encuentra dentro de una sociedad en constante cambio, y es ahí en donde la estadística proporciona métodos que permiten el estudio de hechos económicos, poniendo en evidencia sus características más importantes y estableciendo limitaciones, condiciones y alcance de las conclusiones que dicho análisis puede generar. Por lo tanto, es importante que los economistas utilicen la estadística para tener un indicador cuantitativo de los resultados de la economía.

En el segundo capítulo se presentan las Probabilidades con aplicaciones a la Ingeniería de Alimentos relacionado con el objetivo 2 del Desarrollo Sostenible, establecido por la ONU para poner fin al hambre, lograr la seguridad alimentaria y la mejora de la nutrición y promover la agricultura sostenible.

Dentro de la industria alimentaria existen muchas situaciones donde es necesario el control o monitoreo simultáneo para la calidad del proceso productivo. En tanto las probabilidades ayudan en el monitoreo de la producción en plantas industriales, así como en la detección segura de los acontecimientos anormales dentro del proceso, lo que favorecerá a la reducción de los costos de producción y con una tasa inferior de defectos del producto. El objetivo de este capítulo consiste en aplicar las probabilidades estadísticas en plantas industriales y, especialmente, en las plantas procesadoras de alimentos.

La calidad ocupa un papel indispensable en las industrias alimentarias, convirtiéndose en una ventaja competitiva que consideran los requerimientos del consumidor, de modo que satisfagan plenamente sus necesidades y superen las expectativas. Para hacer posible el logro de estas metas, se requiere de la reingeniería de procesos, los procesos de comparación competitivos, la calidad, el control estadístico de procesos y en particular del dominio de las probabilidades.

Se abordarán las nociones básicas de la teoría de probabilidades relacionadas específicamente a los experimentos estadísticos, espacios muestrales y los eventos estadísticos. Las reglas aditivas de probabilidad, independencia estadística, condicional y regla multiplicativa, con la finalidad de ejemplificarlos a la Ingeniería de Alimentos.

El tercer capítulo está destinado al estudio de las Variables Aleatorias con aplicaciones en el Área de Salud coherente con el objetivo 3 del desarrollo sostenible para garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos.

En la actualidad, los cálculos estadísticos son indispensable en las ciencias de la salud, por eso en este libro se explican los métodos más utilizados dentro de las variables aleatorias que permiten obtener resultados e interpretar los parámetros alcanzados para elegir los adecuados. Todo estudio estadístico se fundamenta en procesar la información disponible acerca de un conjunto de variables, con la aplicación de los principios elementales de la probabilidad y teoremas de la probabilidad que son algunos de los temas expuestos.

La salud siempre ha sido un área en la que las probabilidades y estadística son muy aplicables dada su naturaleza y la posibilidad de experimentar con distintos sujetos y condiciones. Por tal motivo, se presenta en esta sección la aplicabilidad en esta área, abarcando las variables aleatorias discretas y continuas, sus distribuciones y funciones de probabilidad, esperanzas matemáticas y varianzas.

En el cuarto capítulo se desarrollan las distintas funciones de distribución para las Variables Aleatorias Discretas con aplicaciones a la Ingeniería Industrial que se relaciona con objetivo 12 del desarrollo sostenible para garantizar modalidades de consumo y producción sostenibles.

Existe un uso generalizado de la estadística en el campo de la ingeniería, este libro establece el recorrido desde la investigación previa de un conjunto de datos, seguido con la formulación de un modelo aleatorio para el mecanismo de generación de éstos, terminando en la introducción a las técnicas de inferencia que formalizan los resultados o las conclusiones que se puede extraer del análisis de muestras.

Dentro del ámbito industrial a menudo surgen grandes cantidades de datos que corresponden a un sinnúmero de variables, para la aplicación de métodos de análisis y técnicas elementales que dan explicación del modelo de comportamiento de la población de donde se obtienen los datos.

En el quinto capítulo se contemplan las Variables Aleatorias Continuas con aplicaciones en la Ingeniería Eléctrica y Mecánica, relacionadas con el objetivo 11 del desarrollo sostenible "Ciudades y Comunidades Sostenibles".

El contenido de este capítulo se basa en temas estadísticos aplicados a ingeniería eléctrica y mecánica, con ejemplos y ejercicios propuestos relacionados a la distribución normal y el uso de tablas estadísticas a partir de la distribución normal estandarizada, con el cálculo de probabilidades aplicadas para experimentar con modelos de probabilidad y con la generación de muestras aleatorias.

Los ingenieros en su quehacer profesional se encuentran frente a la toma de decisiones en circunstancias en donde priva la incertidumbre, cuando el azar y el riesgo, son notables. El estudio de variables y probabilidades dentro de la estadística es significativo para su efectivo desempeño laboral. Por lo tanto, en este capítulo se presenta una clara explicación, de las técnicas y métodos estadísticos de gran uso para generar información útil en la toma de decisiones, junto con algunos procedimientos que guardan relación con la ingeniería, para las cuales la probabilidad tiene aplicación.

Con la finalidad de establecer una correspondencia de los resultados obtenidos, en experimentos en donde los valores se miden en escala continua y con números reales, las variables aleatorias continuas pueden explicar los resultados de la medición de alguna actividad.

El sexto capítulo se refiere a las Estimaciones Puntuales y por Intervalo con Aplicaciones en Educación, que establece una relación con el objetivo 4 del desarrollo sostenible para garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos.

Mediante la aplicación de estimaciones se pretende realizar una aproximación dentro de una característica de una población completa y, sobre todo, al importante papel que desempeña en el ámbito de la investigación en educación, que sirve de apoyo y ayuda para afrontar el estudio de diferentes problemas que pueden contribuir a la mejora de la misma.

El objetivo es el estudio, análisis y tratamiento de uno o varios parámetros de una población entre la que se ha efectuado un muestreo y con los datos recogidos se espera dar respuesta a las interrogantes planteadas.

En el último capítulo se contemplan las Pruebas de Hipótesis con Aplicaciones en Jurisprudencia, vinculadas con el objetivo 16 del desarrollo sostenible para promover sociedades, justas, pacíficas e inclusivas.

Las pruebas de hipótesis estadísticas dentro de la disciplina del derecho se estudiaron cuantitativamente, específicamente los tipos de hipótesis estadísticas: nula y alterna, así como los procedimientos de prueba de hipótesis para distintos parámetros poblacionales como: media, varianza, proporción, entre otros. Los tipos de errores que pudieran cometerse (tipo I y tipo II), las regiones de rechazo y las decisiones a las que se pueden llegar, con el objetivo de contribuir al desenvolvimiento de la vida en sociedad.

La estadística brinda a los estudiantes y profesionales de la carrera de Derecho y áreas afines los métodos y técnicas más importantes para realizar sus investigaciones y preparar casos en los que tengan que actuar como expertos, así como en todos los procedimientos legales dentro del desarrollo de su trabajo.

Este libro está también dirigido a estudiantes de las carreras donde se imparte la asignatura Estadística, a nivel de pregrado y postgrado. La claridad de los planteamientos, ejercicios propuestos, ejercicios resueltos y autoevaluación; lo hace versátil y muy útil para su comprensión y estudio. Todos los temas contemplados existen en muchas referencias bibliográficas las cuales han sido tomadas como fuentes de consulta, sin embargo, el enfoque es original de los autores. De igual forma, los análisis de datos pueden ser realizados por cualquier programa estadístico, no se menciona alguno en particular porque cada uno tiene sus particularidades.

Las aplicaciones de los ejercicios en cada capítulo, se han seleccionado de acuerdo a la experiencia de los autores en el dictado de la asignatura Estadística y en investigación en Educación para la Sustentabilidad, realizada por el Grupo de Investigación Sociedad Sustentable (GISS) de la UPEC. A continuación se expone la misión y el objetivo de este grupo de investigación con la finalidad de establecer la pertinencia del mismo con el presente libro:

EL GISS tiene como misión: "Satisfacer las demandas sociales a través de la formación en contenidos de sustentabilidad, la investigación y la vinculación con la sociedad, generando conocimientos relacionados con educación, turismo y enfermería que contribuyen al desarrollo económico, social, científico-tecnológico, cultural y ambiental de la región."

Y su objetivo es: "Desarrollar investigación para promover proyectos dirigidos hacia la sustentabilidad en la sociedad del Carchi y del Ecuador que incluyan educación, turismo y enfermería en donde la UPEC sea un ente generador de principios sustentables que permita la articulación de sus diferentes dependencias y lograr una integración de las dimensiones social, económicas, institucionales y políticas"

Uno de los proyectos asociados al GISS es el Modelo de educación para la sustentabilidad para la UPEC. Este proyecto propone un nuevo modelo educativo basado en contenidos de sustentabilidad. De acuerdo a la revisión de las mallas curriculares la inclusión de la sustentabilidad en los currículos es bajo. Con este libro se realiza un aporte en este sentido, ya que muestra que estos contenidos pueden ser incluidos en cualquier asignatura. De esta manera, se puede educar en sustentabilidad, garantizando su transversalidad en la malla curricular de cada carrera. Esta publicación se deriva de este proyecto de investigación, por ello agradecemos a la Universidad Politécnica Estatal del Carchi y su Comisión de Publicaciones.

CAPÍTULO 1

Estadística descriptiva
Con aplicaciones a la economía

relacionado con el ODS 8 "Trabajo decente y crecimiento económico." En este ODS se promueve el crecimiento económico sostenido, inclusivo y sostenible, el empleo pleno y productivo y el trabajo decente para todos.

La Estadística Descriptiva es la ciencia de recolectar, organizar, presentar, analizar e interpretar datos numéricos para ayudar a tomar mejores decisiones. Por ejemplo, un empresario que va a lanzar un nuevo producto al mercado se debe preguntar, ¿Cuántas unidades podré vender?, ¿Cuál es el potencial del mercado con respecto al producto en cuestión? A esas preguntas el economista debe contestar diciendo que no hay una única respuesta, que se necesita recopilar y describir la información requerida pues, la cantidad demandada depende de muchos factores y entre estos se encuentra el precio que se cargue por unidad.

RAZONES PARA ESTUDIAR ESTADÍSTICA:

Existen diversas razones por la cual estudiar estadística, unas de ellas son:

- Hay datos en todas partes.
- Las técnicas estadísticas se usan para tomar muchas decisiones que afectan nuestra vida.
- No importa cuál sea su futura o actual línea de trabajo, tomará decisiones que involucren datos.

TIPOS DE ESTADÍSTICAS

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA: Es aquella que utiliza métodos para organizar, resumir y presentar datos de manera informativa.

ESTADÍSTICA INFERENCIAL: Se refiere a aquellos métodos que son usados para determinar algo acerca de la población basándose en una muestra.

POBLACIÓN

Conjunto de todos los posibles individuos o mediciones de interés. Es cualquier colección, ya sea de un número finito de mediciones o una colección grande, virtualmente infinita, de datos acerca de algo de interés. El procedimiento de análisis se esquematizó en la figura 1. Dependiendo de los objetivos de la investigación se puede analizar la población completa o una muestra de ella. Se siguen una serie de pasos que van desde su obtención hasta su análisis e interpretación.

MUESTRA

Es un subconjunto o parte representativa de la población de interés. Algunos tipos de muestreo son:

Muestreo al Azar Simple

Muestreo Estratificado
Muestreo Sistemático
Muestreo Accidental
Muestreo Intencional
Muestreo por Etapas

En forma más específica: ¿Qué representa una población de datos?

El análisis estadístico de una población o universo de datos tiene como objetivo final descubrir las características y propiedades de aquello que generó los datos. Por ejemplo, si se tiene una población de gerentes de todas las empresas de Ecuador, en el sector industrial (población física, población de gerentes) y se les mide su ingreso mensual. El conjunto de datos de los ingresos constituye una población o universo estadístico. El análisis de estos datos (universo estadístico) sirve para caracterizar a la población de gerentes (población física).

Un economista está interesado en realizar un estudio sobre diferentes empresas de su región (población de empresas). En cada una de ellas, estudia los diferentes proyectos de inversión en lo que ha participado en los últimos cinco años (población de proyectos de inversión). Para cada proyecto, mide una variable económica-financiera, obteniéndose una gran cantidad de resultados numéricos (población de datos). El economista realiza esta tarea porque está interesado a través de los datos numéricos obtenidos, evaluar el comportamiento de las empresas, que es lo que realmente le interesa.

- Datos Estadísticos
  - Información Completa → Población pequeña
  - Muestra
    - Población finita pero grande
    - Población infinita
- Métodos Estadísticos
  - Recopilación
  - Organización
    - Crítica y Corrección.
    - Clasificación de datos corregidos.
    - Tabulación.
  - Presentación
    - Enunciado mediante palabras.
    - Tablas.
    - Gráficos.
  - Análisis
    - Estadística Descriptiva.
    - Estadística Inferencial.
  - Interpretación

Figura 1. Procedimiento de análisis de datos

Entonces, es importante destacar que detrás de un universo o población de datos se encuentra una población física subyacente, formada por elementos de la realidad, de la cual se obtuvieron los datos numéricos a través de algún tipo de medición.

Es esa población física subyacente (elemento de la realidad, seres humanos, lotes de material, entre otros), la que se desea estudiar y caracterizar por medio del análisis estadístico de los datos obtenidos. La población estadística está representando una población física o natural formada por elementos de la realidad con respecto a una característica o propiedad de esa población física.

VARIABLES

Los elementos de una población tienen características comunes que los identifican, los cuales no son idénticas para todos ellos, esto es, son variables. Las variables pueden ser cualitativas o cuantitativas de acuerdo a la naturaleza de los datos y su escala de medida. Los tipos de variables se presentan en la figura 2.

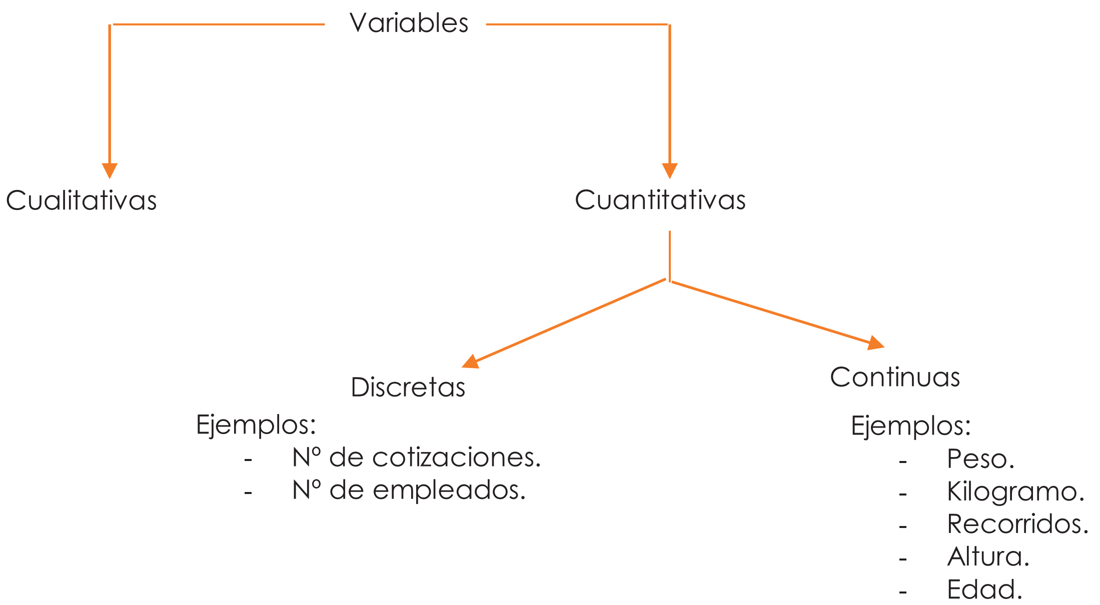


Figura 2. Tipos de variables.

PARÁMETRO

Valor que caracteriza a una población como un todo. Se calcula tomando en cuenta a todos los elementos que la constituyen. Es un valor fijo, pero usualmente desconocido.

ESTADÍSTICO

Valor que caracteriza a una muestra, por ello varía de muestra a muestra.

ETAPAS PARA REALIZAR EL ANÁLISIS DE DATOS

La estadística descriptiva tiene como intención exhibir las características de las observaciones sin otro propósito que describir su comportamiento. Se presentan las etapas para su análisis:

RECOPILACIÓN DE DATOS: Puede hacerse de tres maneras:

Diseño Experimental (con condiciones experimentales controladas).

Censo (sobre toda la población).

Encuestas (sobre una muestra).

PRESENTACIÓN DE DATOS: Puede hacerse:

En el texto.

En Tablas o Cuadros.

En Gráficos.

TABLAS DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS:

La organización de los datos puede hacerse a través de un arreglo de datos (ordenamiento de menor a mayor) o de distribuciones de frecuencias. La distribución de frecuencias es un agrupamiento de datos en categorías, dando el número de observaciones que están en cada una de ellas.

Se sabe que una población o universo de datos es un conjunto muy grande de números. Estos números pueden estar en un gran listado. Una gran tabla de números ordenados al azar prácticamente no muestra información acerca de la población de datos.

Suponiendo que se dispone de los datos del universo, ¿cómo se pueden clasificar y ordenar los números para obtener más información acerca de ese universo de datos?

Una forma es escribir los números desde el menor hasta el mayor (arreglo de datos). Si los números son todos enteros y además se coloca encima de cada uno tantas cruces como veces aparece repetido en la población: El número de veces que aparece repetido cada dato es la frecuencia de dicho valor. Su representación se denomina distribución de frecuencias de la población. También muestra los valores máximo y mínimo de la población, cuya diferencia es el rango.

Si los números no son enteros o se tienen un número muy grande de datos, se divide el rango total en sub-intervalos y se cuenta el número de valores que cae dentro de cada sub-intervalo. Cada sub-intervalo se denomina clase.

Ejemplo

Suponga que el gerente del departamento financiero de una empresa privada, desea recoger información sobre las utilidades que ha generado tal empresa en períodos mensuales a lo largo de dos años y medio, con el objeto de medir su rentabilidad, eficiencia, y otras variables económicas de interés.

La empresa tiene ocho años en el mercado, y para ello solicita la información de una muestra aleatoria de 30 meses, desde su creación hasta la fecha relacionada con las utilidades y obtiene conclusiones acerca de la utilidad promedio de la empresa durante los años que tiene en funcionamiento (tablas 1 y 2).

Tabla 1.
Utilidades de la empresa en (Miles de $) para una muestra de 30 meses

16,2	15,8	15,8	15,8	16,3	15,6
15,7	16,0	16,2	16,1	16,8	16,0
16,4	15,2	15,9	15,9	15,9	16,8
15,4	15,7	15,9	16,0	16,3	16,0
16,4	16,6	15,6	15,6	16,9	16,3

Tabla 2.
Arreglo de datos de las utilidades de la empresa en (Miles de $) para 30 meses (de mayor a menor)

16,9	16,4	16,2	15,9	15,8	15,6
16,8	16,3	16,2	15,9	15,8	15,6
16,8	16,3	16,0	15,9	15,8	15,6
16,6	16,3	16,0	15,9	15,7	15,4
16,4	16,2	16,0	15,9	15,7	15,2

Distribución de Frecuencias (Levantamiento de Tablas). Pasos.

Determinar el rango o amplitud de variación (ΔV).

Decidir el número de clases.

Determinar i: $i = \dfrac{\Delta V}{\text{Número de clases}}$ Ecuación 1

Construir las clases.

Asignar cada dato a la clase correspondiente (frecuencia absoluta).

Para todas las clases la diferencia entre el límite inferior y en el límite superior es la misma. En el ejemplo:

$\Delta V = 16{,}9 - 15{,}2 = 1{,}7$

$n = 6$

$i = 0{,}28 \approx 0{,}3$ (la aproximación es por exceso)

Refiérase a las tablas 3-5 y las figuras 3 y 4.

Rango Percentil:

Representa el porcentaje de los casos de un grupo que alcanzó valores menores que el citado. En este caso, el percentil 60 es 16,1 de acuerdo a la figura 3.

OBSERVACIÓN: algunos programas estadísticos, al realizar el conteo de observaciones en cada clase, no incluyen el límite inferior de cada clase, pero si incluyen el límite superior. En este ejemplo por el contrario se incluye el límite inferior y el límite superior se incluye en la clase inmediatamente superior. En realidad, lo importante es establecer un criterio para la asignación de los datos en cada clase.

Tabla 3.
Distribución de frecuencia para las utilidades de la empresa en miles de dólares en 30 meses

Clases	Frecuencia Absoluta
15,2 – 15,5	2
15,5 – 15,8	5
15,8 – 16,1	11
16,1 – 16,4	6
16,4 – 16,7	3
16,7 – 17,0	3
	30

Tabla 4.
Distribución de frecuencia menor que para las utilidades de la empresa en miles de dólares en 30 meses

	Frecuencia Acumulada
Menor que 15,2	0
Menor que 15,5	2
Menor que 15,8	7
Menor que 16,1	18
Menor que 16,4	24
Menor que 16,7	27
Menor que 17,0	30

Tabla 5.
Ojiva "menor que" usando frecuencias acumuladas relativas para las utilidades de la empresa en miles de dólares en 30 meses

Clases	Frecuencia Acumulada Relativa (en %)
Menor que 15,2	0
Menor que 15,5	6,6
Menor que 15,8	23,3
Menor que 16,1	60
Menor que 16,4	80
Menor que 16,7	90
Menor que 17,0	100

.

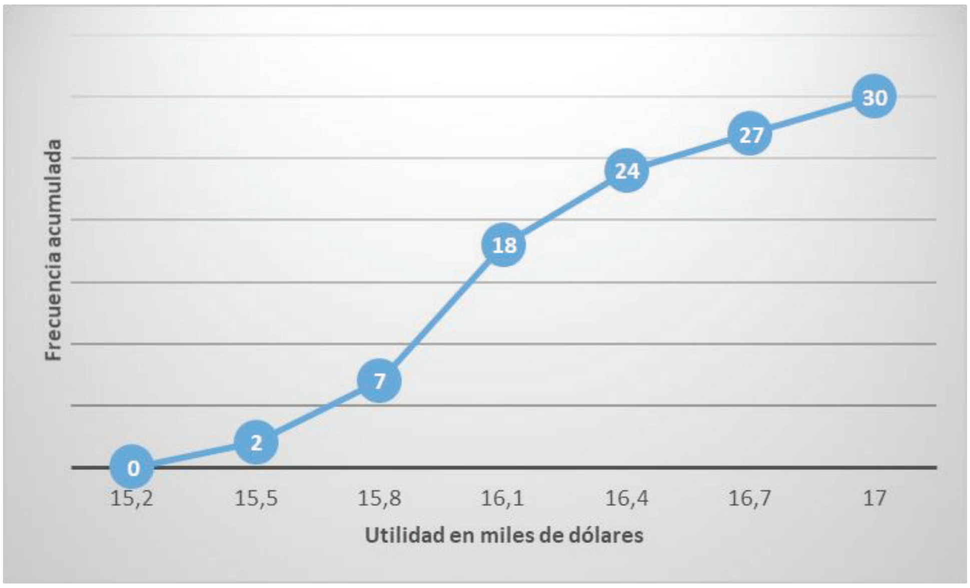


Figura 3. Ojiva "menor que" usando frecuencias acumuladas para las utilidades de la empresa en miles de dólares en 30 meses

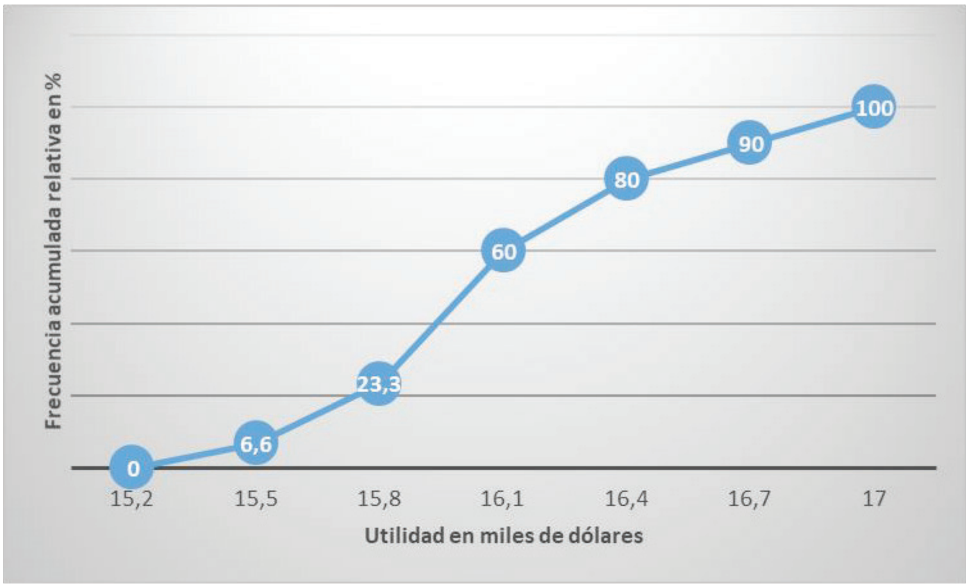


Figura 4. Ojiva "Menor Que" usando frecuencias acumuladas relativas para las utilidades de la empresa en miles de dólares en 30 meses

Ejemplo

Una empresa realiza un estudio sobre todos los trabajadores que posee. El gerente quiere información sobre el gasto semanal generado por cada uno de ellos. Se tomó una muestra aleatoria de 40 empleados y se obtuvo el gasto semanal en dólares (tabla 6).

Tabla 6.
Gasto semanal generado por una muestra aleatoria de 40 empleados

18	63	84	38	54
50	59	54	56	36
26	50	34	44	41
58	58	53	51	62
43	52	53	63	62
62	64	61	52	60
60	45	66	83	71
63	58	51	71	77

GRÁFICOS

Histograma de frecuencia

Gráfica en la que las clases se indican en el eje horizontal y las frecuencias en el eje vertical. Las frecuencias en cada una de las clases se representan por la altura de las barras, y las barras se trazan adyacentes una de otra indicando que la variable es continua (figura 5).

La distribución de frecuencias muestra las características de estos datos, allí se observa; si hay resultados que son más frecuentes que otros, si los valores están ubicados alrededor de un valor central, si están muy dispersos o poco dispersos, entre otros.

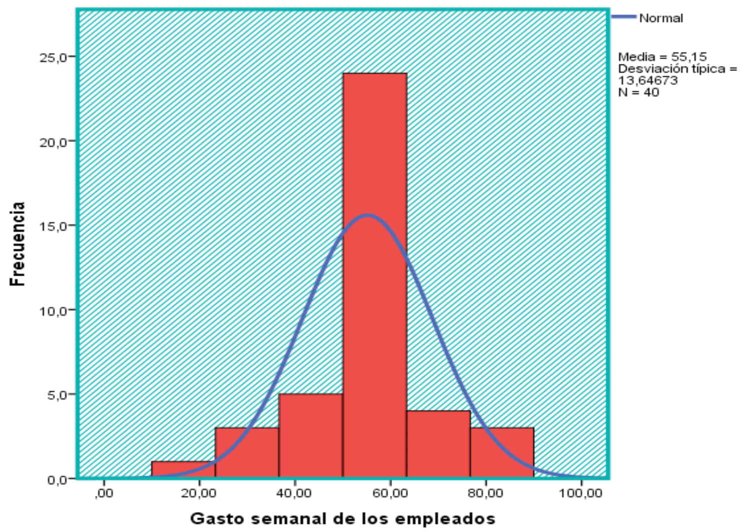


Figura 5. Histograma de frecuencia del gasto semanal de los empleados de una empresa.

Diagrama de tallo y hojas

En los diagramas de tallo y hojas se agrupan los datos manteniendo sus valores originales y dan una idea de su distribución (figura 6). No se recomiendan en casos donde son demasiadas observaciones, en cuyo caso se recomienda agrupar los datos en distribuciones de frecuencia, aun cuando haya pérdida de información. Por ejemplo, en la figura 6, los casos graficados son: 18, 26, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 45, 50, 50, 51, 51, 52, 52, 53, 53, 54, 54, 56, 58, 58, 58, 59, 60, 60, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 65, 66, 70, 71, 77, 83, y 84.

MÍNIMO18
MEDIANA 57
MÁXIMO 84

	TALLO	HOJAS
1	1	8
1	2	
2	2	6
3	3	4
5	3	68
8	4	134
9	4	5
19	5	0011223344
(5)	5	68889
16	6	001222333
7	6	56
5	7	01
3	7	7
2	8	34

Figura 6. Diagrama de tallo y hoja del gasto semanal de 40 empleados de una empresa.

Diagramas de caja

Estos gráficos permiten visualizar la dispersión de los datos, aquí se ubica el primer cuartil en la línea de la parte inferior de la caja, la mediana en la parte central y el tercer cuartil o cuartil superior, en la parte superior de la caja.

La altura de la caja indica la dispersión de los datos y si la medida de tendencia central es representativa de los ellos. La posición de la línea central muestra si existe simetría en la distribución de los datos o no.

Se visualizan también si existen datos atípicos; estos se muestran como puntos que se encuentran fuera de los bigotes de la caja. En este caso hay tres posibles datos atípicos (outliers en inglés). Vea la figura 7.

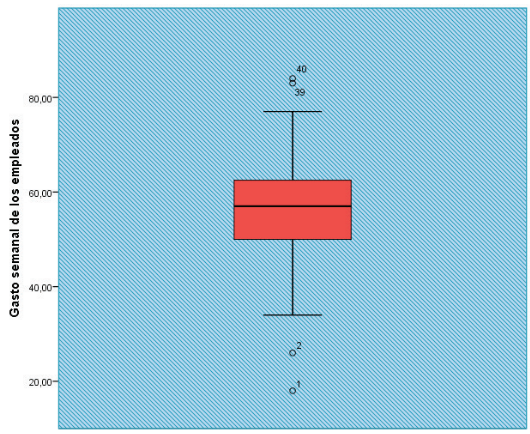


Figura 7. Diagrama de Caja del gasto semanal de los empleados de una empresa.

Escalas de Medida

Para definir una variable es necesario identificar el tipo de escala que se utilizará para medirla. En este caso se consideran cuatro tipos de escalas:

- Nominal
- Ordinal
- De intervalo
- De razón o proporción

Nominal

Se utiliza cuando las categorías son mutuamente excluyentes. Es posible asignar etiquetas las cuales carecen de orden o jerarquía. Ejemplo:

Hombre Mujer	o	Ingeniero Abogado

Ordinal

Se utiliza cuando existen categorías de la variable, pero estas, si poseen un orden o jerarquía. Existe una relación "mayor que" o "menor que" entre ellas. Se les puede asignar un valor numérico a las categorías. Ejemplo:

Grado de instrucción

- Universitario 3
- Bachiller 2
- Escolar 1

De intervalo

Se utiliza cuando los datos son numéricos y además la separación de la variable tiene sentido. El valor cero no indica la ausencia de la propiedad.

Por ejemplo:

Temperatura (0°C no indica que no hay temperatura sino el punto de congelación del agua).

-10°C – 0°C,
0°C – 10°C,
10°C – 20°C

De proporción o razón

Es similar a la escala de intervalo. En ella, el valor cero (0) si indica ausencia de la propiedad estudiada. Es posible realizar operaciones aritméticas entre los datos.

Por ejemplo:

Ingresos (Cero dólares ($) indica que las personas con este rango no tienen ingresos, es decir no ganan nada).

0$ - 50$,
50$ - 100$
100$ - 150$

Medidas de Tendencia Central

Las más conocidas son:

- La media aritmética
- La mediana
- La moda

A continuación, se describe cada una de ellas:

MEDIA ARITMÉTICA

Una característica importante de cualquier población es su posición, es decir donde está ubicada con respecto al eje de las abscisas. Una manera de obtener un dato numérico que dé idea de la posición es el promedio o la media de las observaciones. Es apropiada para mediciones cuantitativas en escala de medida de proporción o razón. Se denota por μ para la media aritmética poblacional y $\overline{X}$ para la media aritmética muestral.

Para datos no agrupados:

Muestra

n = Tamaño de la muestra

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Población

N = Tamaño de la población

$x_1, x_2, \ldots, x_N$

$$\mu = \frac{\sum X_i}{N}$$

En datos agrupados en distribuciones de frecuencias la media aritmética viene dada por:

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i * \overline{X}_c}{n} \qquad \text{Ecuación 4}$$

Donde: $\overline{X}$: Media aritmética de la muestra.
f_i : Frecuencia de cada clase.
$\overline{X}_c$: Punto medio de cada clase, también se denomina como marca de clase o centro de clase (cc).
n : Tamaño de la muestra.

Ventajas de la media aritmética:

Es única para cada conjunto de datos y puede ser fácilmente calculada.
Cada observación es tomada en consideración.

Desventajas de la media aritmética:

Es afectada por valores extremos.

En el caso poblacional, este importante parámetro (denotado por μ) permite efectuar comparaciones entre distintas poblaciones. Por ejemplo, si se tiene una población formada por mediciones del producto interno bruto (PIB) de los países de África, otra del PIB de los países de Europa y una tercera de los países de América, es indudable que los promedios serían diferentes. El promedio entonces, está diciendo que las tres poblaciones de PIB son diferentes y también en qué medida difieren.

MEDIANA

La mediana es la observación central una vez que los datos han sido ordenados de manera creciente o decreciente. Es el elemento que ocupa la posición (n+1)/2. Por ejemplo, en 13 datos ordenados de menor a mayor, la mediana es el dato que ocupa la posición (13 + 1)/2 = 7, esto es; es el dato que ocupa la séptima posición. Es apropiada para mediciones cualitativas en escala de medida ordinal. Se denota por Md.

En datos agrupados en distribuciones de frecuencias la mediana viene dada por:

$$Md = L_i + \frac{\frac{n}{2} - F_i(ac)}{F(abs)} * i$$

Dónde: Li: Límite inferior real de clase.
Fi(ac): F acumulada hasta la clase anterior a la clase mediana.
F(abs): F absoluta en la clase mediana.
n: Tamaño de la muestra.
i: Intervalo de clase.

Ejemplo: Se tienen datos referentes a las tasas de interés en diversas áreas económicas expresadas en porcentajes:

2 5 5 9 10 12 13 la mediana es el 9, el cual ocupa la cuarta posición.

Si el número de datos es par:
2 5 6 10 12 15 la mediana es (6+10)/2 = 8, este dato es el promedio de los resultados de la tercera y cuarta posición.

Ventajas de la mediana
No es afectada por valores extremos.
Puede utilizarse para datos cualitativos en escalas de medida ordinal.

Desventajas de la mediana

Se deben organizar los datos antes de realizar los cálculos.
La media aritmética es más usada que la mediana, en datos en escalas de medida de proporción o razón.

MODA

Es aquel valor que se repite más frecuentemente en un conjunto de datos. Es apropiada para mediciones en escala de medida nominal. Se denota por Mo. Puede existir: Una moda y el conjunto se llama unimodal; dos modas y se llama bimodal; o más de dos modas y se denomina multimodal.

Ventajas de la moda

Es la única medida de tendencia central que es posible calcular cuando los datos son cualitativos y están en escala de medida nominal.

Desventajas de la moda

El azar puede hacer que algunas veces un valor no representativo se repita muchas veces. Muchas veces no hay un valor modal. Si hay tres o más modas los datos son difíciles de interpretar.

Comparación de la Media, Mediana y Moda

En distribuciones simétricas la Media ($\overline{X}$), Mediana (Md) y Moda (Mo) coinciden en un solo punto. En distribuciones asimétricas hay un desplazamiento de la media y la mediana hacia la derecha o izquierda dependiendo del comportamiento de los datos. (Figuras 8 y 9).

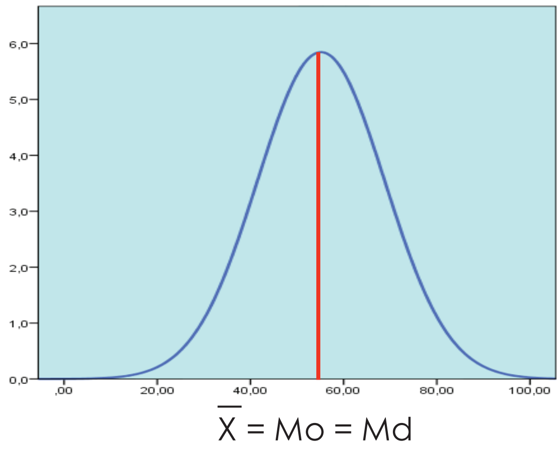


Figura 8. Media, mediana y moda en distribuciones simétricas

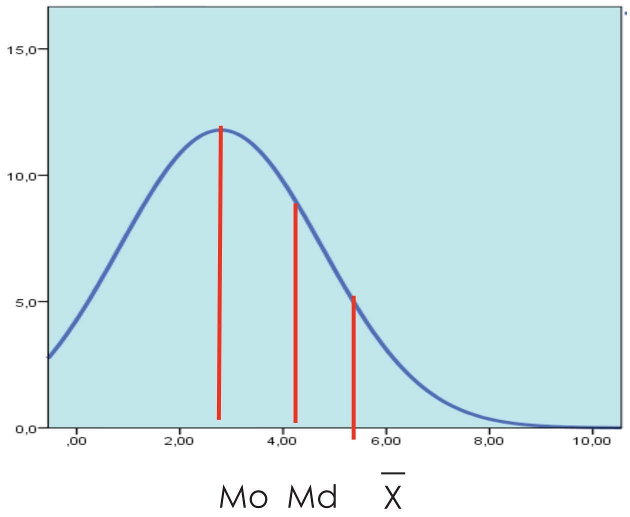


Figura 9. Moda, mediana y media en distribuciones asimétricas

Medidas de dispersión

Si se tiene el crecimiento económico de dos sectores ecuatorianos (Zona Sierra y Zona Costa), cuyo promedio en las ciudades de la sierra representan un 6,95%, mientras que, en las ciudades costeras, el crecimiento promedio es 8,25% ¿se puede afirmar que ambas zonas (poblaciones) son equivalentes? Para contestar esta pregunta se necesita tener medidas de la dispersión de los datos. Entre ellas se encuentran:

- Rango.
- Desviación media.
- Varianza.
- Desviación estándar.
- Coeficiente de variación.

RANGO

$$R_{ango} = V_{máx} - V_{mín} \qquad \text{Ecuación 6}$$

Vmax es el valor máximo y Vmin es el valor mínimo en un conjunto de datos.

DESVIACIÓN MEDIA

$$DM = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \qquad \text{Ecuación 7}$$

x_i es cada una de las n observaciones del conjunto de datos. $\bar{x}$ es la media aritmética de la muestra. n es el tamaño de la muestra.

VARIANZA POBLACIONAL

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum X_i^2 - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{N}}{N} \qquad \text{Ecuación 8}$$

X_i es cada una de las observaciones que constituyen la población de datos. μ es la media aritmética de la población. N es el tamaño de la población.

DESVIACIÓN ESTÁNDAR POBLACIONAL

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}} \qquad \text{Ecuación 9}$$

X_i es cada una de las observaciones que constituyen la población de datos. μ es la media aritmética de la población. N es el tamaño de la población.

MEDIA DE MEDIAS

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \overline{X}_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \qquad \text{Ecuación 10}$$

$\overline{X}_i$ es cada una de las medias de un grupo de datos, i toma valores de 1, 2,…k; k es el número de grupos.

VARIANZA MUESTRAL

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} \qquad \text{Ecuación 11}$$

xi es cada una de las observaciones del conjunto de datos. $\overline{x}$ es la media aritmética de la muestra. i toma valores de 1, 2,…n; n es el tamaño de la muestra.

El reemplazo de la media desconocida μ por la media muestral $\overline{x}$ da origen a esta definición de s^2, la cual se divide por n-1. Si la varianza muestral está dada por la ecuación 11, este será un estimador insesgado de σ^2 sin importar la distribución de la población de interés.

VARIANZA CONJUNTA

$$s_C^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i^2 (n_i - 1)}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)} \qquad \text{Ecuación 12}$$

S_i^2 es cada una de las varianzas de un grupo de datos, n_i es el tamaño de cada grupo, i toma valores de 1, 2,…k; k es el número de grupos.

COEFICIENTE DE VARIACIÓN CONJUNTO

$$CV_{conj} = \frac{\sqrt{s_C^2}}{\overline{\overline{X}}} \qquad \text{Ecuación 13}$$

s_c^2 es la varianza conjunta, $\overline{\overline{X}}$ es la media de medias.

COEFICIENTE DE VARIACIÓN

$$CV = \frac{s}{\overline{X}} * 100 \qquad \text{Ecuación 14}$$

S es la desviación estándar de la muestra, $\overline{X}$ es la media aritmética de la muestra. El CV se expresa en porcentaje.

DATOS AGRUPADOS

MEDIA PARA DATOS AGRUPADOS

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \overline{x}_c * f_i}{n} \qquad \text{Ecuación 15}$$

$\overline{x}$ es la media aritmética de la muestra. f_i: Frecuencia de cada clase. i toma valores de 1, 2,…k; donde k es el número de clases. $\overline{x}_c$: Punto medio de cada clase. n es el tamaño de la muestra.

VARIANZA PARA DATOS AGRUPADOS

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \overline{x}_{c_i}^2 * f_i - \frac{(\sum_{i=1}^{k} (\overline{x}_{c_i} * f_i)^2}{n}}{(n-1)} \qquad \text{Ecuación 16}$$

f_i: Frecuencia de cada clase. i toma valores de 1, 2,…k; donde k es el número de clases.

$\overline{x}_{c_i}$: Punto medio de cada clase. n es el tamaño de la muestra.

La varianza es un número que permite comparar poblaciones. Cuando la dispersión de las observaciones es grande (datos que se alejan mucho del promedio) el valor de los residuos (distancia entre cada dato y el promedio) será grande. Entonces aumenta la suma de cuadrados de los residuos y por lo tanto la varianza. La desviación estándar tiene las mismas unidades que la variable con que se está trabajando, lo cual es una ventaja. Una manera precisa de dar una idea de la dispersión de los valores de una población o de una muestra es a través de la varianza o su raíz cuadrada que es la desviación estándar.

Pero aún mejor es el coeficiente de variación como medida de dispersión, ya que es un valor adimensional (no tiene unidades) por lo tanto permite comparar la variabilidad de poblaciones que fueron medidas con distintas unidades (por ejemplo, una en centímetros y otra en Kilogramos).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se presentan a continuación las ventas netas de una empresa (miles de dólares) durante los últimos 44 meses.

34,2	33,6	33,8	34,7	33,1	34,7	34,2	33,6	34,5	35,0	33,4
32,5	35,6	35,4	34,7	34,1	36,3	36,2	34,6	35,1	35,1	36,8
34,7	35,1	35,0	37,9	33,6	35,3	34,9	36,4	37,8	32,6	35,8
34,6	36,6	33,1	37,6	33,6	35,4	34,6	37,3	34,1	34,6	35,9

- Construya una representación de tallo y hoja de los datos
- Construya una tabla de distribución de frecuencias con k=5
- Encuentre la mediana, la moda y el promedio muestral de los datos no agrupados y agrupados. Explique la forma en que estas tres medidas de tendencia central describen diferentes características de los datos.
- Encuentre la varianza y coeficiente de variación.
- Construya un histograma y ojiva para los datos tabulados.

2. Los datos que a continuación se presentan corresponden a la inversión (miles de dólares) en proyectos, realizada por 30 instituciones del sector financiero, periodo 2016-2017.

38	35	76	58	48	59	67	63	33	69	53	51
28	35	36	32	61	57	49	78	48	42	72	52
47	66	58	44	44	56						

- Elabore un cuadro de distribución de frecuencias (use k=5).
- Con los elementos que aporten el cuadro y los estadísticos que considere necesarios calcular, caracterice el rendimiento del grupo. Si se sabe que la inversión estimada para dos tipos de empresas del mismo sector fue:

Empresa	Inversión (M$)	Varianza (M$)^2	Empresas muestreadas
Banca privada	39	16	150
Banca pública	35	9	300

- Compare la variabilidad de la inversión en la banca privada con respecto a la inversión en la banca pública.

3. Se llevó a cabo un estudio cruzado para investigar si la implementación de dos estrategias económicas (ajustes a la política monetaria y ajustes a la política fiscal), reducían la crisis-gobierno en un país. Se sometieron 20 países a ajustes en su política monetaria y a otros 14 países a ajustes en su política fiscal. Ello se reflejó en los porcentajes del déficit público que aparecen en la tabla adjunta.

Política Monetaria									
4,61	6,42	5,40	4,54	3,98	3,82	5,01	4,34	3,80	4,56
5,35	3,89	2,25	4,24	4,25	3,50	5,03	4,65	3,96	3,95

Política Fiscal									
3,84	5,57	5,85	4,80	3,68	2,96	4,41	3,72	3,49	3,84
5,26	3,73	1,84	4,14						

- Valiéndose de las técnicas aprendidas. ¿Cómo presentaría, describiría y compararía este estudio? ¿A qué conclusiones puede llegar?

- El valor del stock de capital se encuentra relacionado con todos los flujos de inversión que se han realizado durante un período determinado en un país. A continuación, se suministran los datos de stock de capital, medido en millones de dólares en ese país durante el 2018:

630	365	950	730	330	720
405	475	350	450	650	770
770	500	750	780	350	920
615	750	445	670	500	805
400	540	550	900	700	850

- Además de estos datos, se cuenta con la información de otros países que han tenido flujos de inversión a lo largo de los años. En ellos se encontró información relativa al promedio y variación en la frecuencia de sus inversiones:

Número de países	**Frecuencia de Inversión (stock de capital)**	**Promedio de stock (MM$)**	**Varianza**
50	Primer año	750	68375
75	Segundo año	1200	44567
65	Tercer año	1500	23659

Con esta información, responda razonando su respuesta:

- ¿Qué medidas deben considerarse para llegar a una conclusión con respecto al nivel de stock durante el 2018 en el país mencionado?
- ¿Para cual año fue mejor el comportamiento del stock promedio para el grupo de países considerados (primero, segundo o tercer año)?
- Discuta las respuestas, en base a sus cálculos.

4. A continuación, se presenta información que contiene el déficit o superávit presupuestario de algunos países de América, entre los años 2010 y 2018, medido en porcentaje de PIB.

	AÑO								
País	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**
México	-2,8	-1,7	-0,8	-3,1	-2,9	-3,5	-3,5	-4,4	-2,8
Bolivia	-9,9	-7,7	-5,8	-6,4	-5,8	-9,2	-4,7	-2,9	-9,9
Venezuela	-3,2	-4,4	-4,7	-3,5	-2,0	-1,5	-1,2	-1,2	-3,2
Brasil	-0,1	0,9	3,6	0,5	-2,1	-3,4	-3,5	-3,4	-0,1
Ecuador	-4,2	-4,3	-2,3	-2,2	-4,4	-6,6	-4,1	-2,4	-4,2
Honduras	0	1,3	2,3	1,5	0,4	0,1	2,1	5,2	0
Chile	1,6	1,6	6,9	5,0	4,1	2,6	2,4	2,8	1,6
Puerto Rico	-0,7	-3,5	-0,2	-0,1	0,3	1,7	1,6	1,6	-0,7

a. ¿Cómo pudieran los datos organizarse mejor?
b. ¿Qué puede decir acerca del valor medio de PIB por país?
c. ¿Cuál es el PIB promedio en general? ¿Se acerca este valor al encontrado en el inciso b, por país?
d. ¿Cómo es la dispersión del PIB encontrado en Ecuador? ¿Difiere ésta de la encontrada en los otros países? ¿Por qué?

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1

Con fines de evaluación financiera de las empresas de un determinado sector industrial, se estudió el rendimiento (sobre 100 puntos), de las empresas existentes en un área relativamente homogénea pertenecientes al oriente de Ecuador. Se tomó una muestra aleatoria de 40 empresas y se tabularon sus rendimientos en función a los ingresos y gastos durante un periodo de tiempo, obteniéndose los siguientes valores:

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60

- Construir una tabla de distribución de frecuencias con k=5.
- Construir el histograma, el polígono de frecuencias y la ojiva.
- Hallar el número de empresas ubicadas en el cuartil superior.
- Calcular la media aritmética, la mediana y la moda para datos agrupados y no agrupados (comparar los resultados y discutirlos).
- Calcular la desviación estándar, la varianza y el coeficiente de variación para datos agrupados y no agrupados (comparar los resultados y discutirlos).

Posteriormente se tomó otra muestra aleatoria de otras 40 empresas correspondientes al occidente ecuatoriano y se tabularon, de igual manera, sus rendimientos, obteniéndose una media de 70 y una desviación estándar de 25.

- Establezca comparaciones entre las muestras de empresas del Oriente y Occidente y concluya.

En otro país vecino (Perú) se realizó el mismo estudio, obteniéndose los siguientes resultados en cuanto a las evaluaciones financieras (calificaciones sobre 20 puntos):

Oriente	Centro	Occidente
$\overline{X}_1=11$	$\overline{X}_2=12{,}5$	$\overline{X}_3=14$
$s_1=2$	$s_2=3{,}5$	$s_3=4$
$n_1=70$	$n_2=50$	$n_3=30$

- ¿Considera que el rendimiento de las empresas de este otro país es más o menos variable que en Ecuador?

Solución:

Pasos para la construcción de la tabla de distribución de frecuencias

Se deben ordenar las observaciones de menor a mayor para facilitar los cálculos posteriores:

59	62	66	69	73	75	77	82	87	93
60	62	68	71	74	75	78	82	88	93
60	63	68	72	74	75	78	84	88	94
61	65	68	73	75	76	79	85	90	95

Cálculo de Amplitud de Variación (ΔV)

ΔV = Vmáx. - Vmín.= 95 – 59 = 36

Intervalo de clases (IC)

$$IC = \frac{\Delta V}{k} = \frac{36}{5} = 7{,}2 \approx 8$$

En la tabla 7 se muestra la distribución de frecuencias del rendimiento en 40 empresas del oriente de Ecuador. Allí, el límite inferior de la primera clase es 59 y el límite superior de esa clase se obtiene sumándole 8; esto es, 59 + 8 =67. De la misma manera se encuentran los límites de cada una de las clases siguientes. Es necesario resaltar que la aproximación del IC siempre es por exceso, de esa manera se garantiza que no quede ningún dato fuera del número de clases seleccionado.

Tabla 7. Distribución de Frecuencias del rendimiento (calificaciones sobre 100 puntos) en 40 empresas del Oriente de Ecuador

Clases	Límites		f_i	f_{rel}	F_i	F_{rel}
	LI	LS				
1	59	67	9	22,5	9	22,5
2	67	75	10	25	19	47,5
3	75	83	11	27,5	30	75
4	83	91	6	15	36	90
5	91	99	4	10	40	100
			n =40	100		

Donde; f_i: frecuencia absoluta
f_{rel}: frecuencia relativa
F_i: frecuencia acumulada
F_{rel}: frecuencia relativa acumulada
n: tamaño de la muestra

Las cuales se obtienen de la siguiente manera:

f_i: Para obtener la frecuencia absoluta de la primera clase, se cuenta el número de observaciones que se encuentren entre 59 y 66; y así sucesivamente para cada una de las clases.

f_{rel}: Para obtener la frecuencia relativa de la primera clase, se determina el porcentaje que representa esa frecuencia observada, es decir,

$$f_{rel} = \frac{9*100}{40} = 22{,}5\%$$

Para determinar la frecuencia acumulada Fi; para la primera clase es la misma frecuencia absoluta (9), dado que no se ha acumulado nada; en la segunda clase es la frecuencia de esa clase más la frecuencia de la clase anterior (10+9), así sucesivamente.

F_{rel} es denominada frecuencia relativa acumulada. Se calcula dividiendo Fi entre n (40 en este caso) y multiplicando por 100 se lleva a porcentaje.

Histograma de distribución de frecuencias:

Es un gráfico de barras verticales, donde se coloca en el eje de las X los límites de clases y en eje de las Y las frecuencias (altura de las barras).

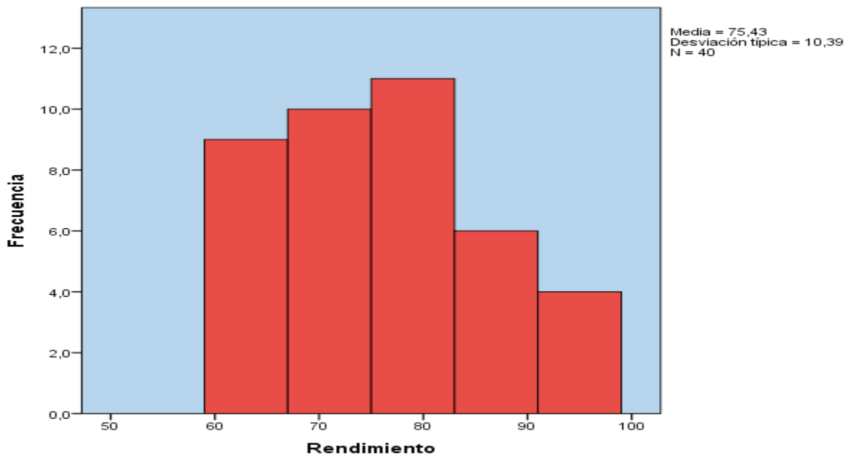


Figura 10. Histograma del rendimiento de la evaluación financiera de 40 empresas del oriente ecuatoriano.

Polígono de Frecuencias:

Es un gráfico de líneas, donde se coloca en el eje X las marcas o puntos medios de clases y en el eje Y las frecuencias absolutas.

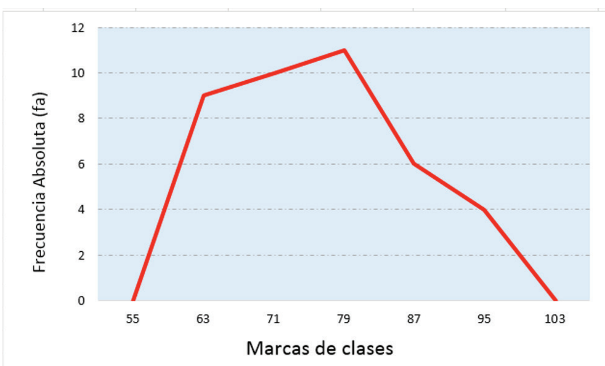


Figura 11. Polígono de frecuencias del rendimiento en la evaluación financiera de 40 empresas del oriente ecuatoriano.

Ojiva: Es un gráfico de la distribución de frecuencia relativa acumulada, que permite leer cuantiles (valor bajo el cual se encuentra una determinada proporción de los valores de la distribución).

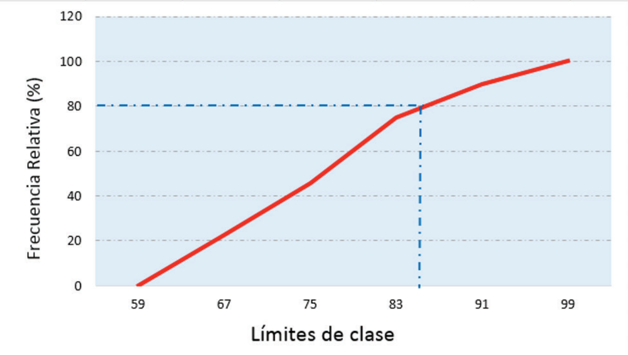


Figura 12. Ojiva del rendimiento de la evaluación financiera de 40 empresas del oriente ecuatoriano.

El cuartil superior corresponde al cuarto cuartil, es decir, entre 75 y 100% de las observaciones; lo cual es equivalente a 10 empresas, que puede observarse en la figura 12 y en la tabla 7, donde el cuarto cuartil está representado por las clases: 4 (83-91) y 5 (91-99).

Medidas de concentración

Datos no agrupados:

Media: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{59+60+...+94+95}{40} = 75{,}425$ Moda: Mo = 75

Mediana: por ser n par corresponde a la observación $\dfrac{40+1}{2} = 20{,}5$, es decir, el promedio entre la observación 20 y la 21, $\mathrm{Me} = \dfrac{75+75}{2} = 75$

Datos agrupados:

Tabla 8. Cálculos del rendimiento promedio varianza

Clases	Límites		cc (centro de clases)	fi	cc*fi	cc²*fi
	LI	LS				
1	59	67	63	9	567	*35721*
2	67	75	71	10	710	*50410*
3	75	83	79	11	869	*68651*
4	83	91	87	6	522	*45414*
5	91	99	95	4	380	*36100*
				40	*3048*	*236296*

Media aritmética muestral:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} cc * f_a}{n} = \frac{3048}{40} = 76{,}2$$

Moda: Mo= punto medio de la clase con mayor frecuencia

Mo= 79

Mediana:

$$M_d = L + IC(j/f_m)$$

Donde;

L: es el límite inferior de la clase donde se encuentra la mediana (clase mediana)
IC: Intervalo de clases
j: Es el número de observaciones en la clase anterior a la clase mediana, necesarias para completar un total de n/2, en Fi.
fm: frecuencia de la clase mediana

$$M_d = 75 + 8(1/11) = 75{,}73$$

Cuando se cuenta sólo con una tabla de distribución de frecuencias, se pueden obtener valores aproximados para la media, mediana y moda (o cualquier otra medida numérica descriptiva). Los valores exactos pueden calcularse únicamente a partir de las observaciones individuales del conjunto (datos no agrupados).

Los cálculos aproximados se basan en los puntos medios de cada clase y sus respectivas frecuencias. En general, mientras más pequeña sea la longitud de la clase y mayor la uniformidad de las observaciones en esta, mayor será la similitud entre las medidas descriptivas calculadas en los datos agrupados y no agrupados (Canavos, 1988). Por ello es que se observa que no coinciden los resultados de los datos agrupados con los no agrupados.

Medidas de dispersión

Datos no agrupados:

Varianza:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(59 - 75{,}425)^2 + ... + (95 - 75{,}425)^2}{40-1} = 107{,}943$$

Desviación estándar:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{107{,}943} = 10{,}389$$

Coeficiente de variación:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} * 100 = \frac{10{,}389}{75{,}425} * 100 = 13{,}78\%$$

Datos agrupados:

Varianza:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} cc^2 * fa - \frac{(\sum_{i=1}^{n} cc * fa)^2}{\text{n}}}{n-1} = \frac{236296 - \frac{(3048)^2}{40}}{40-1} = 103{,}5487$$

Desviación estándar:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{103,5487} = 10,176$$

Coeficiente de variación:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} * 100 = \frac{10,176}{76,2} * 100 = 13,35\%$$

$\bar{x} = 70$, $s = 25$

Como las empresas pertenecen al mismo país, la evaluación es realizada en las mismas unidades y el mismo tamaño de muestra; se puede decir, que las empresas del occidente presentan un rendimiento promedio menor a nivel financiero, además con mayor desviación de las observaciones con respecto al promedio.

En este caso como se desean comparar dos países y estos emplean distintas calificaciones para evaluar el rendimiento financiero, se deben hallar los CV conjuntos de cada país para poder compararlas, ya que el CV es adimensional.

$$CV_c = \frac{s_c}{\bar{\bar{x}}} * 100$$

$$s_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i - n}$$

Ecuador:

$$s_{Ecuador}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{39(103.5487 + 625)}{40 + 40 - 2} = 364,274$$

$$s_{Ecuador} = \sqrt{s_{Ecuador}^2} = \sqrt{364,274} = 19,086$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{76.2 * 40 + 70 * 40}{40 + 40} = 73,1$$

$$CV_{Ecuador} = \frac{19,086}{73,1} * 100 = 26,11\%$$

Perú:

$$s^2_{Perú} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + (n_3 - 1)s_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3} = \frac{69 * 4 + 49 * 3{,}5^2 + 29 * 16}{70 + 50 + 30 - 3} = 9{,}1173$$

$$s_{Peru} = \sqrt{s^2_{Peru}} = \sqrt{9{,}1173} = 3{,}019$$

$$\bar{\bar{x}}_{Peru} = \frac{11 * 70 + 12.5 * 50 + 14 * 30}{70 + 50 + 30} = 12{,}1$$

$$CV_{Peru} = \frac{12.1}{3{,}019} * 100 = 24{,}95\%$$

Como puede observarse en los CV, Perú presenta menor variabilidad (24,95%) del rendimiento financiero de sus empresas, con respecto a Ecuador (26,11%).

Ejercicio 2

Considere los datos obtenidos en una empresa que exporta productos a diversos países, donde se determinó la variable costo de exportación (en miles de dólares) durante 25 meses consecutivos

36,45	38,20	42,31	51,29	50,90
40,54	41,35	35,59	57,36	42,11
44,35	45,52	37,26	55,20	44,80
42,11	47,90	40,11	46,40	53,30
50,81	48,06	53,12	58,09	56,14

- Realizar una tabla de distribución de frecuencias (con k=6).
- Histograma
- Polígono de frecuencias
- Diagrama de tallo y hoja
- Diagrama de caja

Responda:

- ¿Cuántos meses poseen un costo que se encuentra entre 37,80 y 45,00 M$?
- ¿Cuántas observaciones se encuentran entre 40,00 y 55,32 M$?
- Para los datos agrupados y no agrupados: Calcular la media aritmética, la varianza y el CV. % Compare los resultados obtenidos en ambos casos.

Solución:

a. Datos ordenados:
b. Distribución de frecuencias (tabla 9)

35,59	40,54	44,35	48,06	53,30
36,45	41,35	44,80	50,81	55,20
37,26	42,11	45,52	50,90	56,14
38,20	42,11	46,40	51,29	57,36
40,11	42,31	47,90	53,12	58,09

Tabla 9.
Distribución de frecuencias del costo de exportación (en miles de $) durante 25 meses

Clases	Límites		cc	fa	frel	Fa	Frel
	LI	LS					
1	35,59	39,34	37,47	4	16	4	*16*
2	39,34	43,09	41,22	6	24	10	*40*
3	43,09	46,84	44,97	4	16	14	*56*
4	46,84	50,59	48,72	2	8	16	*64*
5	50,59	54,34	52,47	5	20	21	*84*
6	54,34	58,09	56,22	4	16	25	*100*
				25	100		

Histograma

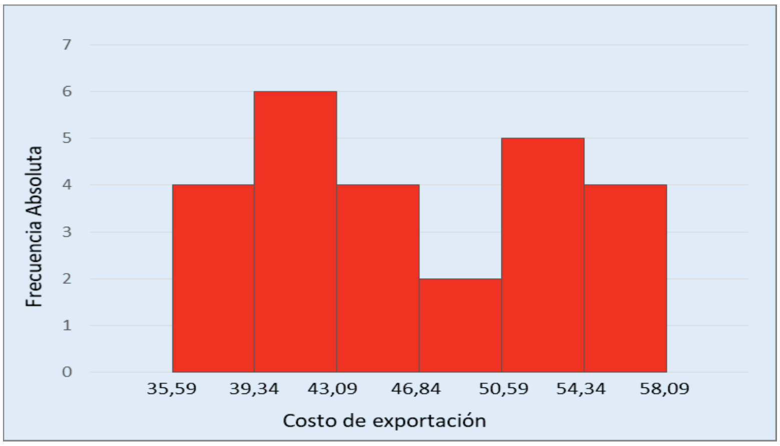


Figura 13. Histograma de distribución de frecuencias del costo de exportación de productos

Polígono de frecuencias

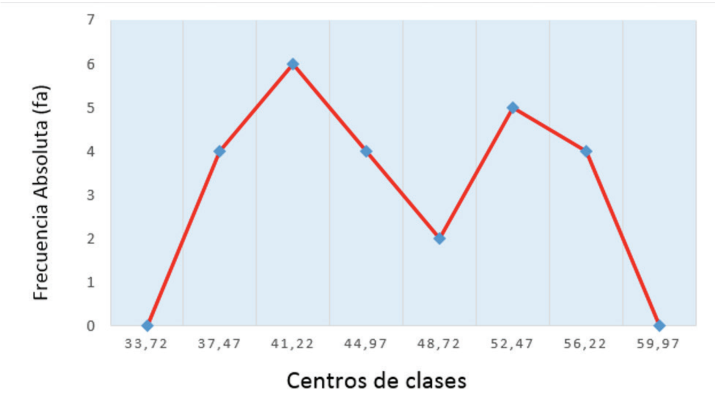


Figura 14. Polígono de frecuencias del costo de exportación de productos

Diagrama de talla y hoja

MINIMO 35,59
MEDIANA 42,52
MAXIMO 58,09

TALLO	HOJAS
3	5678
4	00122244
4	5678
5	00133
5	5678

25 CASOS INCLUIDOS

Figura 15. Diagrama de tallo y hojas del costo de exportación de productos

Diagrama de caja

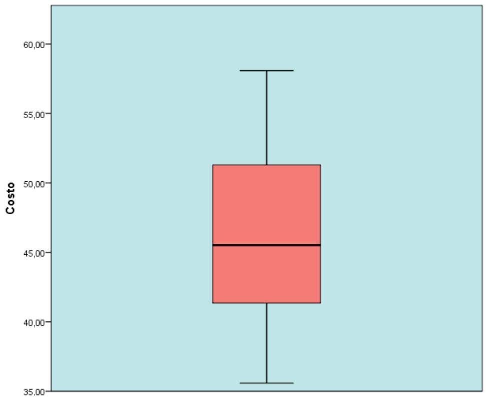


Figura 16. Diagrama de caja del costo de exportación de productos

a. ¿Cuántos meses poseen un costo que se encuentra entre 37,80 y 45,00 M$? Según se observa en los datos ordenados, 9 meses se encuentran entre esos costos.

b. ¿Cuántas observaciones se encuentran entre 40 y 55,32?

18 observaciones.

c. Media aritmética de la muestra: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1} x_i}{n} = \dfrac{35,59 + ... + 58,09}{25} = 46,37$

Varianza muestral: $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{\text{n}}}{n-1} = \dfrac{54873,8431 - \dfrac{(1159,27)^2}{25}}{24} = 46,565$

Desviación estándar muestral: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{46,565} = 6,824$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} * 100 = \dfrac{6,824}{46,37} * 100 = 14,72\%$

Datos agrupados: (tabla 10)

Tabla 10.
Tabla de distribución de frecuencias del costo de exportación en una empresa en miles de dólares durante 25 meses

Clases	Límites		cc (centro de clases)	fa	cc*fa	cc^2*fa
	LI	LS				
1	35,59	39,34	37,47	4	149,86	5614,50
2	39,34	43,09	41,22	6	247,29	10192,06
3	43,09	46,84	44,97	4	179,86	8087,40
4	46,84	50,59	48,72	2	97,43	4746,30
5	50,59	54,34	52,47	5	262,325	13762,88
6	54,34	58,09	56,22	4	224,86	12640,50
				25	1161,63	55043,66

Media: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} cc * f_a}{n} = \dfrac{1161{,}63}{25} = 46{,}465$

Varianza: $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} cc^2 * fa - \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} cc * fa)^2}{\text{n}}}{n - 1} = \dfrac{55043{,}66 - \dfrac{(1161{,}63)^2}{25}}{25 - 1} = 44{,}512$

Desviación estándar: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{44{,}512 = }6{,}671$

Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} * 100 = \dfrac{6{,}671}{46{,}465} * 100 = 14{,}36\%$

Ejercicio 3

Suponga que le interesa analizar los efectos de una nueva medida económica interpuesta por el presidente de una nación. Para cada uno de las catorce empresas del país que generan mayor ganancia, tal efecto es medido en la utilidad antes y después de la aplicación de las medidas. Los datos del estudio son los siguientes:

Momento 1-Utilidad antes (Miles $/mes)

62	35	38	80	48	48	68
26	48	27	43	67	52	88

Momento 2- Utilidad después (Miles $/mes)

46	42	40	42	36	46	45
40	42	40	46	31	44	48

Valiéndose de las técnicas aprendidas ¿cómo presentaría, describiría y compararía este estudio? ¿A qué conclusiones puede llegar?

<u>Solución:</u>

Para presentar, describir y comparar las ganancias de las empresas en los dos momentos se pueden emplear las medidas de concentración y dispersión. Ya que se cuenta con pocos datos, no es necesario realizar una tabla de distribución de frecuencias. De esta manera,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}}{n-1} \qquad s = \sqrt{s^2} \qquad CV = \frac{s}{\bar{x}} * 100$$

Empleando estas ecuaciones se tiene:

$\bar{x}_1 = 52{,}14 \quad s_1^2 = 351{,}98 \qquad CV_1 = 35{,}98\%$

$\bar{x}_2 = 42{,}00 \quad s_2^2 = 20{,}46 \qquad CV_2 = 10{,}77\%$

Para responder la segunda parte debe considerarse que en el momento 1 las empresas presentan una utilidad en promedio mayor (52,14 M$/mes) al momento 2 (42,00 M$/mes); pero se debe señalar que el primer momento es más variable respecto al segundo $CV_1 > CV_2$. Por lo tanto, se puede expresar que aparentemente según las muestras analizadas (la cuales son pequeñas), cuando se aplican las medidas económicas por el gobierno, disminuye la utilidad además de estabilizarse un poco, por ser menos variable, que antes de aplicarlas (es probable que las medidas económicas aplicadas afecten notablemente a las empresas).

Ejercicio 4

Considere la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con media muestral $\bar{x}_n$ y varianza s_n. Sea $z_i = (x_i - \bar{x})/s$, i=1, 2, ..., n. ¿Cuáles son los valores de la media muestral y la desviación estándar muestral de las z_i?

Solución:

$$z_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{s_n}$$

$$\bar{z}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{n * s_n} = \frac{1}{s_n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n} - \frac{n\bar{x}}{n}\right) = \frac{1}{s_n}(\bar{x} - \bar{x}) = 0$$

$$s_{z_n}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z}_n)^2}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} z^2 - 2\bar{z}_n\sum_{i=1}^{n} z \quad + \sum_{i=1}^{n}\bar{z}_n^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} z^2 - 2n\bar{z}_n\sum_{i=1}^{n}\frac{z}{n} + n\bar{z}_n^2\right)$$

$$s_{z_n}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} z^2 - n\bar{z}_n^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} z^2 - 0\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n * s_n^2} = \frac{s_n^2}{s_n^2} = 1$$

Por lo tanto $\bar{z}_n = 0$ y $s_{z_n} = 1$

Ejercicio 5

A continuación, se suministran los datos correspondientes al porcentaje de inflación existente en 35 países europeos durante la década de los 90 sobre el 100%, por ejemplo: la observación 125 indica que hubo una inflación promedio del 25% durante esos años.

125	189	101	177	160	171	155
158	103	127	107	163	128	134
119	130	179	182	185	111	118
176	126	186	122	120	131	165
114	162	100	110	169	153	129

- Realice una Tabla de Distribución de Frecuencias (con k =5).
- ¿Cuántos países tuvieron una inflación promedio menor a 52%?
- ¿Qué porcentaje de los países tuvieron más del 52%?
- ¿Qué porcentaje de ellos se encontraban entre 52 y 78%?
- Realice un diagrama de caja y discútalo.

Además de los países europeos, se obtuvo información del porcentaje de inflación en países de otros continentes para esa década, de los cuales se tiene la siguiente información:

#	Número de países	Continente	% promedio de inflación	Varianza
1	24	África	155	300
2	20	América	135	10,86
3	30	Asia	147	14,53

- ¿Cuál de los cuatro continentes estudiados recomendaría usted para invertir a razón del comportamiento de sus economías? ¿Por qué? (Razone su respuesta)
- Si se compara el conjunto de los tres continentes anteriores (África, América y Asia) con Europa, ¿sería preferible quedarse solo con los países europeos o con la combinación de los tres dados anteriormente?

Solución:

En los problemas que siguen se darán solo las salidas de los análisis realizados con programas estadísticos para que los analice y se familiarice con ellos así como también los gráficos.

Tabla 11.
Distribución de frecuencias para los porcentajes de inflación de 35 países europeos durante un periodo de tiempo (década de los 90)

Clases	Límites LI	Límites LS	f_i	f_{rel}	Fi	Frel
1	100	120	9	25,7	9	25,7
2	120	140	10	28,6	19	54,3
3	140	160	3	8,6	22	62,9
4	160	180	9	25,7	31	88,6
5	180	200	4	11,4	35	100,0
			35	100,0		

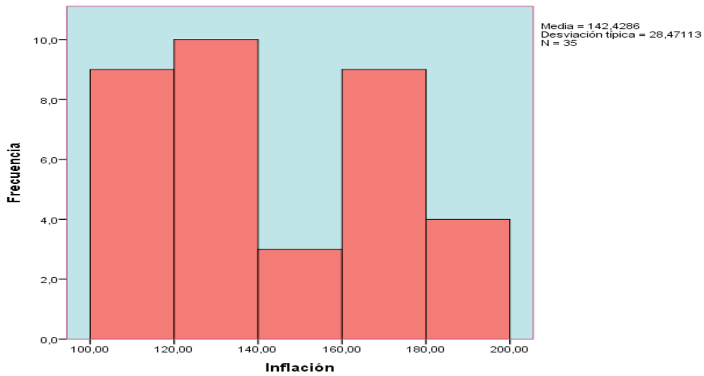


Figura 17. Histograma de frecuencias para los porcentajes de inflación de 35 países europeos durante un periodo de tiempo (década de los 90)

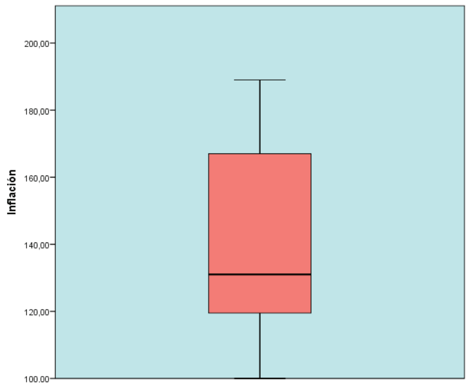


Figura 18. Diagrama de caja para los porcentajes de inflación de 35 países europeos durante un periodo de tiempo (década de los 90)

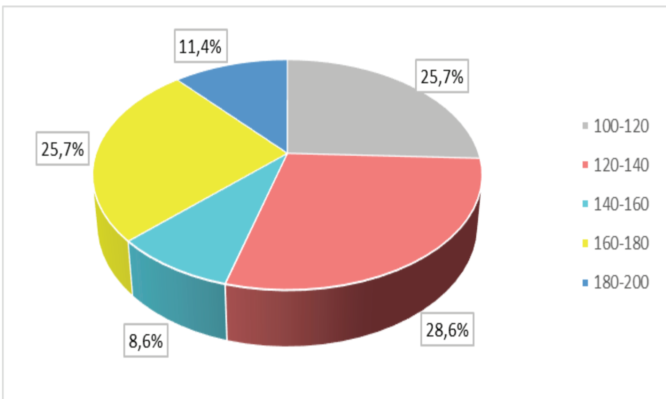


Figura 19. Diagrama de torta para los porcentajes de inflación de 35 países europeos durante un periodo de tiempo (década de los 90).

Ejercicio 6

El volumen de ventas en millones de dólares de un consorcio de tarjetas de crédito a nivel mundial, con sede en España, durante los últimos 25 meses ha presentado el conjunto de datos de la tabla 12.

Tabla 12.
Volumen de ventas en millones de dólares de un consorcio de tarjetas de crédito

315	403	332	370	375
325	387	320	386	340
370	377	390	405	365
375	352	343	380	370
400	389	395	354	376

De información proveniente de otras fuentes, se han obtenido los siguientes resultados para el mismo período de tiempo, pero con otros tres consorcios distintos que operan en sedes diferentes:

Tabla 13.
Volumen de ventas en millones de dólares en tres consorcios distintos

Número de meses	Sede	Volumen de ventas promedio	Varianza
35	Canadá	390	1564
25	Filipinas	378	6700
30	USA	410	11562

1) ¿Cuál de las cuatro sedes estudiadas tiene mejores condiciones y por qué?
2) ¿Propondría usted mantener solo la sede española o generaría un sistema mixto con las otras sedes antes expuestas?

Solución:

Tabla 14.
Distribución de frecuencias del volumen de ventas en millones de dólares de un consorcio de tarjetas de crédito a nivel mundial, con sede en España, durante los últimos 25 meses

Clases	Límites		fa	frel	Fa	Frel
	LI	LS				
1	315	333	4	16	4	*16*
2	333	351	2	8	6	*24*
3	351	369	3	12	9	*36*
4	368	387	9	36	18	*72*
5	387	405	6	24	24	*96*
6	405	423	1	4	25	*100*
			25	100		

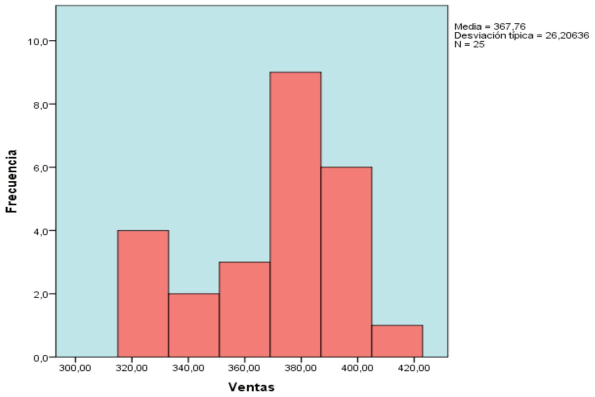


Figura 20. Histograma de frecuencias del volumen de ventas en millones de dólares de un consorcio de tarjetas de crédito a nivel mundial, con sede en España, durante los últimos 25 meses

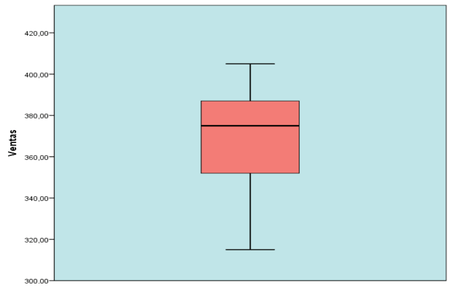


Figura 21. Diagrama de caja del volumen de ventas en millones de dólares de un consorcio de tarjetas de crédito a nivel mundial, con sede en España, durante los últimos 25 meses.

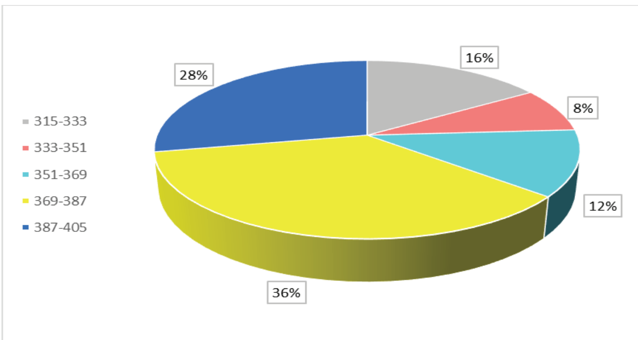


Figura 22. Diagrama de torta del volumen de ventas en millones de dólares de un consorcio de tarjetas de crédito a nivel mundial, con sede en España, durante los últimos 25 meses.

Ejercicio 7

La Jaiba (Callinectes sapidus) es un crustáceo altamente cotizado por su carne de excelente sabor y calidad nutricional. Su aprovechamiento se hace por capturas de individuos silvestres, que viven en playas marinas de relativa poca profundidad y en áreas de fondos areno-fangoso, cerca de manglares, o por la más reciente modalidad de explotación piscícola. Debido a sus altos beneficios este crustáceo es exportado a diversos países obteniendo buenos ingresos. Se presentan a continuación los datos del ingreso mensual.

Tabla 15.
Datos del ingreso mensual (Miles de $) obtenido producto de la venta de Jaibas de esta especie a distintos países de Asia y Europa.

120,4	149,9	128,7	104,3	153,6	167,7	188,5	155,9
140,8	124,5	159,9	154,6	124,6	155,4	177	110,5
167,4	155,6	188,4	132,6	148,8	167,7	155,8	149,5
149	147,2	192,2	100,4	110,5	105,4	123,3	135,5
189,9	169	144	102,5	155,9	134,3	110,6	165,3

- Realice una Tabla de Distribución de Frecuencias (con k =7) e histograma.
- Realice un diagrama de caja y discútalo.
- Realice un diagrama de torta

Solución:

Tabla 16.
Distribución de Frecuencias para el ingreso por ventas (M$) de Jaibas exportadas hacia países de Asia y Europa

Clases	Límites		fa	frel	Fa	Frel
	LI	LS				
1	100,4	115,4	7	17,5	7	*17,5*
2	115,4	130,4	5	12,5	12	*30,0*
3	130,4	145,4	5	12,5	17	*42,5*
4	145,4	160,4	13	32,5	30	*75,0*
5	160,4	175,4	5	12,5	35	*87,5*
6	175,4	190,4	4	10,0	39	*97,5*
7	190,4	205,4	1	2,5	40	*100,0*
			40	100		

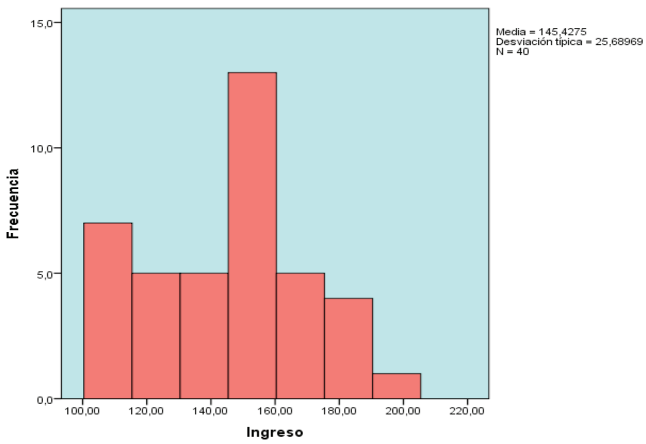


Figura 23. Histograma de frecuencias para el ingreso por ventas (M$) de Jaibas exportadas hacia países de Asia y Europa.

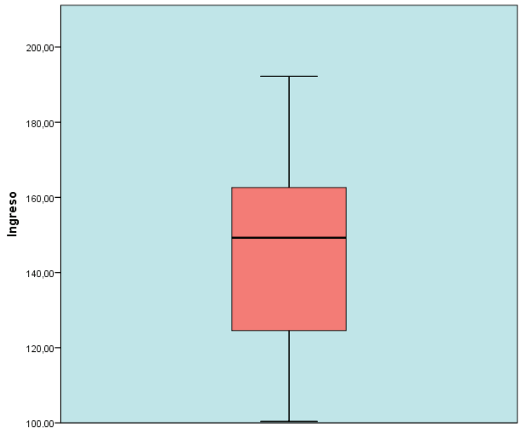


Figura 24. Diagrama de caja para el ingreso por ventas (M$) de Jaibas exportadas hacia países de Asia y Europa.

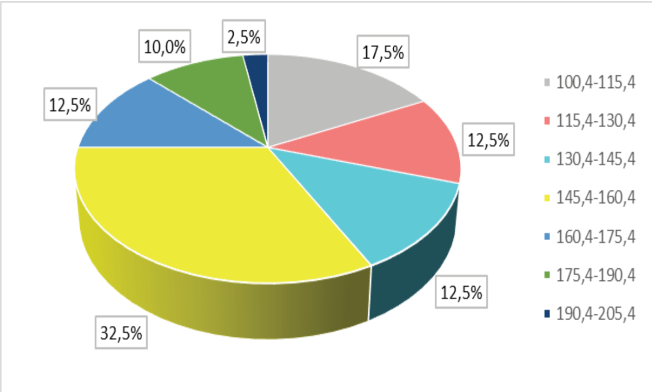


Figura 25. Diagrama de torta para el ingreso por ventas (M$) de Jaibas exportadas hacia países de Asia y Europa.

Ejercicio 8

Los datos de producción de barriles de crudo por día de 32 pozos petroleros ubicados en Barrilito, de fecha 30 de abril de 2018 se presentan en la Tabla 17.

Tabla 17.

Datos de producción de barriles de crudo por día

953	760	590	850	760	950	950	790
877	640	930	1105	870	1000	890	1000
765	832	650	750	1050	760	660	1100
990	800	1300	680	955	900	875	690

- Realice una Tabla de Distribución de Frecuencias (con k = 4).
- Realice un diagrama de caja y discútalo.
- Realice un diagrama de torta

Solución

Tabla 18.
Distribución de Frecuencias de la producción de barriles de crudo por día de 32 pozos petroleros ubicados en Barrilito, de fecha 30 de abril de 2018.

Clases	Límites		fa	frel	Fa	Frel
	LI	LS				
1	590	790	11	34,4	11	34,4
2	790	990	14	43,8	25	78,1
3	990	1190	6	18,8	31	96,9
4	1190	1390	1	3,1	32	100,0
			32	100		

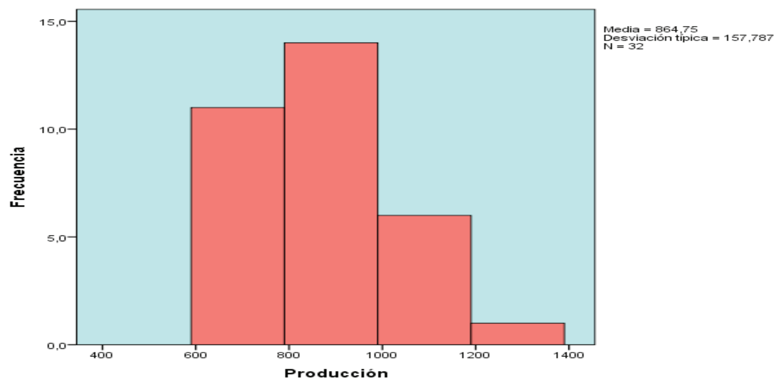


Figura 26. Histograma de la producción de barriles de crudo por día de 32 pozos petroleros ubicados en Barrilito, de fecha 30 de abril de 2018.

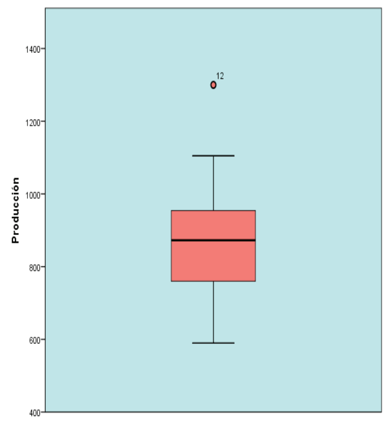


Figura 27. Diagrama de caja de la producción de barriles de crudo por día de 32 pozos petroleros ubicados en Barrilito, de fecha 30 de abril de 2018.

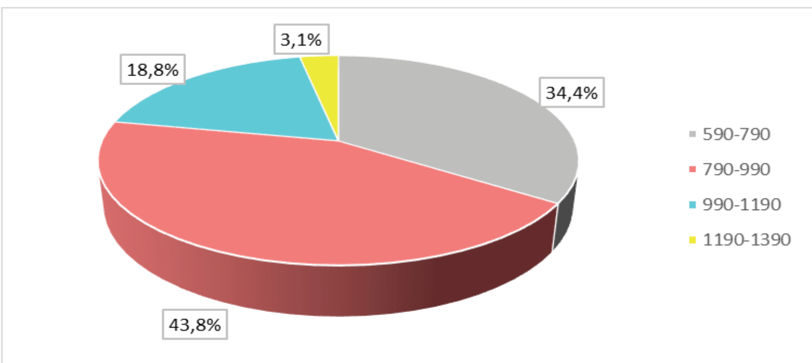


Figura 28. Diagrama de torta de la producción de barriles de crudo por día de 32 pozos petroleros ubicados en Barrilito, de fecha 30 de abril de 2018.

Autoevaluación 1

1. La tasa de desempleo (%) de 40 países tomados al azar durante el 2018, es una variable aleatoria con los siguientes resultados:

10,0	9,00	9,80	7,63	3,38	3,89	4,30	3,50
11,0	9,90	9,75	6,66	5,25	8,38	4,55	2,50
3,10	3,50	7,75	8,34	1,88	7,38	7,38	7,38
1,20	5,50	6,25	7,38	7,38	9,25	9,53	7,99
13,5	2,38	7,35	7,38	12,5	7,38	1,73	8,38

- Calcular la media aritmética, la moda, la mediana, la varianza y el coeficiente de variación para datos no agrupados y agrupados.
- Realizar una tabla de distribución de frecuencias con k=5, graficar e interpretar.

De otros años, se obtuvo información en diversos países:

Año 2017	Año 2015	Año 2013
$\sum_{i=1}^{26} X_{1i} = 23{,}50$	$\sum_{i=1}^{50} X_{2i} = 36{,}15$	$\sum_{i=1}^{30} X_{3i} = 15{,}45$
$s_1^{\ 2} = 21{,}5$	$s_2^{\ 2} = 1{,}5$	$s_3 = 4{,}5$

- ¿Cuál año es más heterogéneo?
- ¿Cuál año (2018, 2017, 2015, 2013) recomendaría usted para presentar su análisis al Director del Ministerio en caso de que pueda escoger alguno de los mencionados?

2. Suponga que se tiene una muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y que se ha calculado $\overline{x}_n$ y s_n^2 para la muestra. Entonces se dispone de una observación $(n+1)$. Sean $\overline{x}_{n+1}$ y s_{n+1}^2, la media muestral y la varianza muestral de la muestra, utilizando las $(n+1)$ observaciones. Indique cómo puede calcularse $\overline{x}_{n+1}$ utilizando $\overline{x}_n$ y x_{n+1}.

CAPÍTULO 2

Probabilidades con aplicaciones en ingeniería en alimentos

Relacionado con el ODS 2 "Hambre cero." Este ODS se generó con la intención de poner fin al hambre, lograr la seguridad alimentaria, la mejora de la nutrición y promover la agricultura sostenible a nivel mundial.

CONCEPTOS BÁSICOS

MODELO

Un modelo es una representación de la realidad utilizado para estudiar y analizar dicha realidad. Los modelos matemáticos dan un resultado numérico preciso, por ejemplo, la velocidad de un fluido alimenticio en una banda transportadora puede obtenerse conociéndose la distancia recorrida y el tiempo que tomó en recorrerla. Este tipo de modelos matemáticos se denominan determinísticos. Hay fenómenos que necesitan otro tipo de modelos matemáticos, que se denominan no determinísticos, probabilísticos o estocásticos.

Por ejemplo, suponga que un ingeniero en alimentos necesita hacer un estudio de factibilidad de un establecimiento industrial del área alimentaria hortofrutícola en la provincia del Carchi. El ingeniero se informa acerca de las hortalizas y frutas que se producen en el área, de la producción, de las temporadas de zafra, del costo de la mano de obra, de la disponibilidad de transporte, entre otras variables relevantes. Sin embargo, no hay una ecuación con esos datos que le permita calcular el resultado final.

De igual manera, no se pueden calcular los milímetros de lluvia que van a caer en un mes en forma precisa; o el número de unidades defectuosas que ocurren en una máquina semanalmente, o el número de accidentes laborales en un mes dado.

Este tipo de fenómenos no admiten un modelo determinístico sino un modelo probabilístico, que como resultado nos dice la probabilidad de que el número de unidades hortofrutícolas procesadas sea igual o mayor a un cierto valor, o la probabilidad de que llueva o la probabilidad de que no exista ninguna unidad defectuosa en una máquina en una semana dada, o de que el número de accidentes laborales en un mes dado sea un valor determinado. El resultado no es un valor determinado, sino la probabilidad de un valor. De aquí la siguiente definición:

FENÓMENO ALEATORIO

Está determinado por el azar. Como ejemplos de fenómenos o experimentos para los cuales es apropiado utilizar un modelo probabilístico se tienen:

- El lanzamiento de un dado en el cual se anota el número que aparece en la cara superior.

- El lanzamiento de cuatro monedas y se cuenta el número de caras y sellos obtenidos.

- En cada 1000 etiquetas utilizadas en el etiquetado de alimentos se cuenta el número de ellas con algún defecto.

- En el envasado de un producto alimenticio se anotan el número de envases con defectos críticos.

- En cada uno de estos casos no se puede predecir el resultado del experimento con absoluta certeza. Hay varios resultados posibles cada vez que se realiza la experiencia.

PROPIEDADES DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

- Puede ser repetido bajo las mismas condiciones.
- No se puede predecir un resultado sino un conjunto de posibles resultados.
- La probabilidad se aproxima a la frecuencia relativa al repetir el experimento un número grande de veces.

Por ejemplo, al lanzar una moneda cada lanzamiento es un ensayo y puede ser repetido sin alterar las condiciones, en este caso se conoce cuáles son las distintas alternativas de salida en la cara superior, pero no podemos predecir cual va a ser la salida antes de realizar el lanzamiento. Finalmente, si lanzamos la moneda diez veces y nos salen 8 caras y 2 sellos, solo se puede obtener la frecuencia relativa del número de caras, que en este caso es 0,80, ella se convierte en probabilidad cuando se realiza este ensayo un número muy grande de veces.

ESPACIO MUESTRAL

Son todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo:

El lanzamiento de un dado en el cual se anota el número que aparece en la cara superior. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

El lanzamiento de cuatro monedas y se cuenta el número de caras y sellos obtenidos.

S = {cccc, sccc, cscc ccsc, cccs, sscc, scsc, sccs, cssc, cscs, ccss, sssc, sscs, csss, scss, ssss}. Estos resultados se pueden obtener de un diagrama de árbol.

En cada 1000 etiquetas utilizadas se cuenta el número de etiquetas con algún defecto.
$S = \{0, 1, 2, ..., 1000\}$

En el envasado de un producto alimenticio se anotan el número de envases con defectos críticos.

$S = \{0, 1, 2, ..., n\}$

EVENTO O SUCESO ALEATORIO

Es cualquier subconjunto de resultados del espacio muestral. En un experimento cualquiera, hay un espacio muestral asociado cuyos elementos son todos los resultados que se pueden obtener del experimento. Un subgrupo o subconjunto de resultados es un evento o suceso aleatorio.

Ejemplo

Considere el evento de lanzar un dado y observe el número que aparece en la cara superior. Halle el espacio muestral. Determine los eventos:

- Que el número sea par.
- Que sea primo.
- Que sea par y primo.
- Que sea par pero no primo.

Solución: Espacio muestral: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2,4,6\}$

$B = \{2,3,5\}$

$C = \{2\}$

$A = \{4,6\}$

TIPOS DE EVENTOS

Evento imposible: Se denota como ∅ y su posibilidad de ocurrencia es nula. Por ejemplo, que ocurra un siete al lanzar un dado.

Evento unión: Si A y B son dos eventos cualesquiera su unión se denota como $A \cup B$ y está conformada por aquellos elementos de A o de B, comunes y no comunes.

Evento intersección: Si A y B son dos eventos cualesquiera su intersección se denota como $A \cap B$ y está conformada por aquellos elementos que pertenecen a A y B simultáneamente (solo los comunes).

Eventos Mutuamente Excluyentes: Son aquellos que no poseen elementos comunes y cuya intersección genera lo que se denomina espacio vacio; $A \cap B = \varnothing$

Evento Complemento: Son aquellos que son colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes. Esto es, unidos me dan la totalidad del espacio muestral y no tienen intersección. Se denota por A^C.

Evento Diferencia: Aquellos elementos que pertenecen al evento A pero no al B. Se denota por A-B.

Evento Diferencia Simétrica: Aquellos elementos que pertenecen a $((A-B) \cup (B-A))$. Se denota por $A \Delta B$.

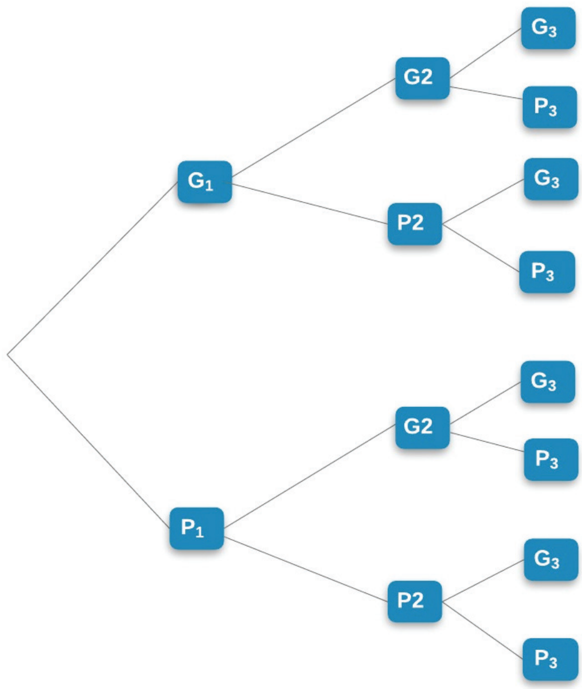
Ejemplo

Para verificar la calidad de los cargamentos traídos por productores de papa a una empresa, se extrae aleatoriamente una papa de cada camión para ver si es de tamaño grande (G) o pequeña (P). Si se tienen tres camiones de papa en un día dado;

- Enumerar los sucesos elementales.
- Enumerar los sucesos de extraer dos papas grandes o más.
- Particionar el espacio muestral en dos sucesos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos (eventos complementarios).

En algunos casos se pueden enumerar y expresar en forma explícita y en otros casos no, esto hace necesario el uso de la teoría combinatoria.

Solución: Para obtener el espacio muestral del experimento se utilizará un diagrama de árbol.



$S=(G_1\, G_2\, G_3), (G_1\, G_2\, P_3), (G_1\, P_2\, G_3), (G_1\, P_2\, P_3), (P_1\, G_2\, G_3), (P_1\, G_2\, P_3), (P_1\, P_2\, G_3), (P_1\, P_2\, P_3)$

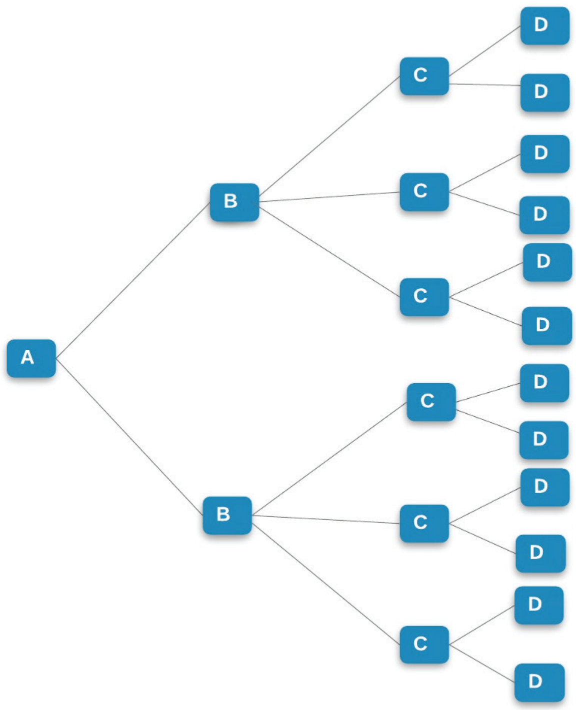
$A = \{ (G_1\, G_2\, G_3), (G_1\, G_2\, P_3), (G_1\, P_2\, G_3), (G_1\, P_2\, P_3)\}$

$B = \{ (P_1\, G_2\, G_3), (P_1\, G_2\, P_3), (P_1\, P_2\, G_3), (P_1\, P_2\, P_3)\}$

Ejemplo

Un ejemplo de enumeración en forma explícita sería: Un transportista desea llevar una carga de alimentos desde la ciudad A hacia la ciudad D pasando por las ciudades B y C. Hay dos carreteras de A a B, tres de B a C y dos de C a D. ¿De cuantas maneras diferentes puede ser realizado el viaje por el transportista?

Solución: 2x3x2 = 12 maneras



TEORÍA COMBINATORIA

Variaciones

Se llaman variaciones de los elementos de un conjunto a una disposición ordenada de los mismos.

Calcula el número de subgrupos de 1, 2, 3, ... elementos que se pueden establecer con los "n" elementos de una muestra. Cada subgrupo se diferencia del resto en los elementos que lo componen o en el orden de dichos elementos (es lo que le diferencia de las combinaciones).

Por ejemplo, al calcular las posibles variaciones de dos elementos que se pueden establecer con los números 1, 2 y 3. Se tendrían seis posibles parejas: (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1) (3,2). En este caso los subgrupos (1,2) y (2,1) se consideran distintos.

Si hay (n) elementos en un conjunto, el número de variaciones dependerá del número de elementos que se deseen tomar y ordenar (r).

Si (r) es menor que (n): $_{n}V_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ Ecuación 17

Si (r) es igual a (n), son permutaciones: $P = n!$ Ecuación 18

Ejemplo

Existen cinco (n=5) proveedores de insumos y postulan para tres empresas (r =3) que en orden de importancia se denominan E1, E2 y E3. Cada proveedor puede ser proveedor en una sola de estas empresas. ¿De cuántas maneras se pueden agrupar los proveedores?

Solución:

$_5V_3$ = 60 maneras

Permutaciones:

Las Permutaciones suceden cuando n = r, esto es, cuando se toma el número de elementos (n) existentes para ordenarlos.

Si los proveedores del problema anterior son A, B y C y postulan para tres empresas de alimentos (r =3) que en orden de importancia se denominan E1, E2 y E3. Cada proveedor puede dar suministro a una sola de estas. De cuantas maneras diferentes se pueden distribuir los proveedores.

Solución:

P_3 = Permutaciones = $_3V_3$ = 6 maneras

Es de resaltar que si no importara el orden estas 6 maneras constituyen una sola manera. En forma explícita los proveedores se distribuyen de la siguiente manera:

EMPRESAS

E_1	**E_2**	**E_3**
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Combinaciones

Se originan cuando solo se está interesado en tomar (r) elementos de un total de (n) y no importa el orden o variación de los mismos.

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$ Ecuación 19

Se determina el número de subgrupos de 1, 2, 3, ... elementos que se pueden formar con los "n" elementos de una nuestra. Cada subgrupo se diferencia del resto en los elementos que lo componen.

Por ejemplo, calcular las posibles combinaciones de dos elementos que se pueden formar con los números 1, 2 y 3. Aquí se pueden establecer solo tres parejas diferentes: (1,2), (1,3) y (2,3). En el cálculo de combinaciones las parejas (1,2) y (2,1) se consideran idénticas, por lo que sólo se cuentan una vez.

Suponga que hay 20 proveedores de frutas en una empresa de alimentos y se desea escoger aleatoriamente tres de ellos para iniciar una nueva línea de mermeladas. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Solución:

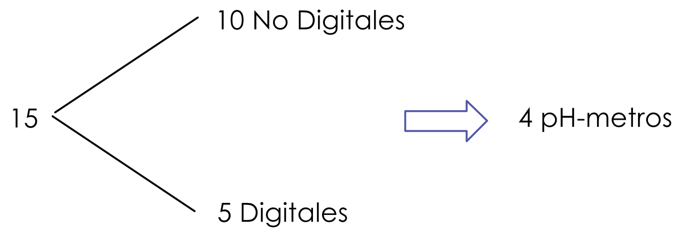
${}_{20}C_3$ = 1140 maneras

Otro ejemplo sería;

Suponga que en un laboratorio de alimentos hay 15 pH-metros, 10 no son digitales y 5 si lo son y se eligen aleatoriamente cuatro de ellos.

a. Hallar el número de maneras como se pueden elegir dos digitales y dos no digitales para dicho grupo de trabajo.
b. El número de maneras como se pueden elegir sea 4 digitales sea 4 no digitales.

Solución:



NOTA: Al determinar el número de combinaciones a veces se necesitan adiciones y otras veces multiplicaciones según sea el problema particular.

a. ${}_{10}C_2 \times {}_5C_2$ = 45 x 10 = 450 maneras

b. ${}_{10}C_4 + {}_5C_4$ = 210 + 5 = 215 maneras

Permutaciones con Repetición

El número de permutaciones diferentes de n objetos de los cuales n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, y n_k son de un k-ésimo tipo, es:

$$P_{n,k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad \text{Ecuación 20}$$

Por ejemplo

¿De cuántas formas diferentes pueden acomodarse 3 frutos rojos, 4 amarillos y 2 verdes en forma lineal en una mesa?

$$\frac{9!}{3!x4!x2!} = 1260 \text{ formas}$$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Dada una situación aleatoria descrita por S y un evento cualquiera A, se dice que **Probabilidad** es una función P que asigna un número real no negativo denotado por **P(A)** que se denomina probabilidad del evento A y cumple los siguientes axiomas:

- $P(A) \geq 0$
- $P(S) = 1$
- Si $A_1, A_2, \ldots, An$ son mutuamente excluyentes
  $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup An) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Para calcular la probabilidad de un suceso:
Se reconoce el espacio muestral S.
Se define el suceso A cuyas probabilidades se van a calcular.
Se calcula P(A). Donde:

$$P(A) = \frac{\text{número de sucesos elementales en A}}{\text{número total de sucesos elementales}}$$ Ecuación 21

La probabilidad P de un suceso es un número entre 0 y 1, que indica en que medida es probable que ocurra el suceso. Si la probabilidad es 1 significa que el suceso ocurrirá con toda certeza. Si la probabilidad es 0,5 significa que un suceso puede ocurrir o puede no ocurrir con la misma probabilidad. Si la probabilidad es 0 quiere decir que el suceso es imposible que ocurra.

Ejemplo 1

En el caso de fenómenos o experimentos cuyo espacio muestral asociado tiene un número pequeño de elementos, se tiene el siguiente ejemplo:

Suponga que se arroja un dado sobre la mesa y apostamos que salga un número igual o menor a 3. Se sabe que los números {1, 2, 3, 4, 5, 6} son igualmente posibles y constituyen el espacio muestral. Pero los números favorables a la apuesta son: {1, 2, 3} el cual es un suceso. Entonces la probabilidad de ganar es: $P = 3/6 = 0{,}5$. Es decir que tenemos a nuestro favor una probabilidad de 0,5 (el 50%). Si se apuesta a un solo número, por ejemplo, al 3 la probabilidad de ganar sería:

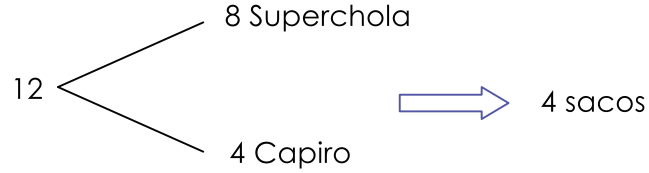
$P = 1/6 = 0{,}1666$.

Ejemplo 2

Suponga que un distribuidor de alimentos ha recibido un embarque de 12 sacos de papa, 8 son de la variedad Superchola y 4 son de la variedad Capiro. Si se venden 4 sacos:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro sacos vendidos 2 sean de Superchola y 2 de la variedad Capiro?.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro sacos vendidos sean de la misma variedad?

Solución:



$$P(a) = \frac{{}_8C_2 * {}_4C_2}{{}_{12}C_4} = \frac{28 * 6}{495} = 0{,}3394$$

$$P(b) = \frac{{}_8C_4 * {}_4C_0}{{}_{12}C_4} + \frac{{}_8C_0 * {}_4C_4}{{}_{12}C_4} = \frac{70 * 1}{495} + \frac{1 * 1}{495} = 0{,}1434$$

REGLAS DE ADICIÓN DE PROBABILIDADES

$P(\emptyset) = 0$

$P(S) = 1$

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes (no tienen intersección):

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$. Ecuación 22

Si dos sucesos son complementarios: $P(A) + P(A^C) = 1$ Ecuación 23

Si los sucesos no son mutuamente excluyentes (tienen intersección no vacía):

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ Ecuación 24

o también,

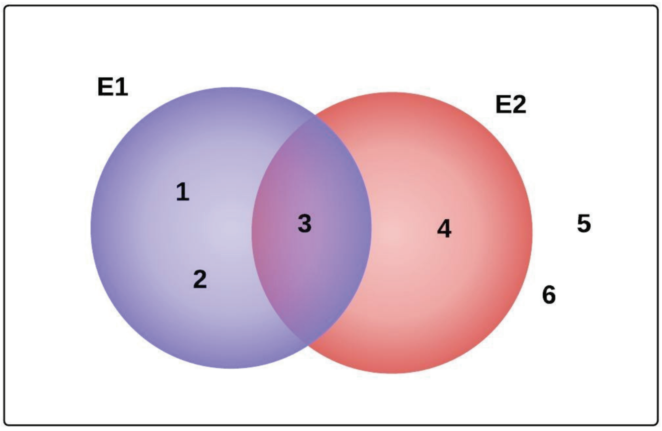
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3)$

$- P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ Ecuación 25

Ejemplo

Sea el experimento donde hay seis competidores para una licitación en una empresa de alimentos, a los cuales se les asigna números del 1 al 6. Sea E1 el suceso de elegir los licitadores con el número 3 o menor y sea E2 el suceso de elegir los licitadores con números 3 o 4. Hallar la P(E1 U E2). Hacer el diagrama de Venn.

<u>Solución:</u>



$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E1 = \{1,2,3\} \Longrightarrow P(E1) = 1/2$$

$$E2 = \{3,4\} \Longrightarrow P(E2) = 1/3$$

$$E1 \cap E2 = \{3\} \Longrightarrow P(E1 \cap E2) = 1/6$$

$$P(E \cup E\ )\quad P(E\ )\quad P(E\ ) - P(E \cap E\ )$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0{,}6667$$

La probabilidad de elegir licitadores con el número 3 o menor; ó con números 3 o 4 es 0,6667.

REGLAS DE MULTIPLICACIÓN DE PROBABILIDADES

Si dos sucesos son independientes, esto es, la ocurrencia de A no afecta la ocurrencia de B y viceversa:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

En estos casos, P(A/B)= P(A), así como también P(B/A)=) P(B).

P(A/B) se denomina probabilidad condicional y se define como la probabilidad de ocurrencia de un evento A dado que un evento B ya ha ocurrido.

Si dos sucesos no son independientes:

P(A ∩ B)= P(A) * P(B/A) donde P(B/A) es la probabilidad de B dado que A ocurrió primero y P(A ∩ B)= P(B) * P(A/B) si B ocurrió primero.

Eventos Independientes y Eventos Dependientes (Probabilidad Condicional).

Ejemplo 1

Suponga que una empresa de productos lácteos contrata hombres y mujeres para el mismo trabajo. Tras un cierto período algunos de los empleados de cada sexo ascienden y otros no. Sean A y A' hombres y mujeres respectivamente y sean B y B' ascendidos y no ascendidos respectivamente. En las siguientes tablas se observan las proporciones de los empleados en estas clases.

Caso 1:

	Sexo		
Ascenso	**A**	**A'**	**Total**
B	0,18	0,12	0,30
B'	0,42	0,28	0,70
Total	0,60	0,40	1,00

Caso 2:

	Sexo		
Ascenso	**A**	**A'**	**Total**
B	0,12	0,18	0,30
B'	0,48	0,22	0,70
Total	0,60	0,40	1,00

a. ¿Cuál es la probabilidad de ser ascendido un empleado del que se sabe que es hombre?
b. Si un empleado es ascendido, ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?
c. ¿Cuál es la probabilidad compuesta de ambos sucesos o sea de que el empleado sea hombre y ascendido?

Solución: Caso 1.

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}18}{0{,}60} = 0{,}30$$

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}30} = 0{,}60$$

$$P(B \cap A) = 0{,}18$$

El Caso 2 se resuelve de forma similar.

Ejemplo 2

Suponga que dos marcas de brixometros están diseñadas para medir los sólidos solubles en forma idéntica. El grupo A consiste en tres brixometros de una marca y el grupo B en dos brixometros de otra marca. Si se sabe que el tres por ciento de las mediciones realizadas por los brixometros del grupo A son incorrectas (D) y que el 98% de las mediciones realizadas por los brixometros del grupo B son correctas (D'). Si se toma al azar un brixometro y se revisan las mediciones realizadas;

a. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un brixometro del grupo A y una medición incorrecta?
b. ¿Cuáles son las otras probabilidades compuestas posibles?

<u>Solución:</u>

$$P(A) = 1/3 \qquad P(D/A) = 0{,}03 \qquad P(B) = 1/2 \qquad P(D'/B) = 0{,}98$$

Parte a)

$$P(D/A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} \quad \Rightarrow P(D \cap A) = P(D/A) * P(A)$$

$$P(D \cap A) = 0{,}03 * 1/3 = 0{,}01$$

Parte b)

$$P(D \cap B) = P(D/B) * P(B)$$
$$P(D \cap B) = [1 - P(D'/B)] * P(B)$$
$$P(D \cap B) = [1 - 0{,}98] * 1/2$$
$$P(D \cap B) = 0{,}01$$

$$P(D' \cap A) = P(D'/A) * P(A)$$
$$P(D' \cap A) = [1 - P(D/A)] * P(A)$$
$$P(D' \cap A) = [1 - 0{,}03] * 1/3$$
$$P(D' \cap A) = 0{,}3233$$

$$P(D' \cap B) = P(D'/B) * P(B)$$
$$P(D' \cap B) = 0{,}98 * 1/2$$
$$P(D' \cap B) = 0{,}49$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Al lanzar dos monedas se definen los eventos F = Ocurre al menos una cara, G = Ocurre al menos un sello. Defina: $F \cup G$ y $F \cap G$

2. Al lanzar dos dados se definen los eventos A = La suma de los dados es 7, B = la suma de los dados es 6, C = La suma de los dados es al menos 6. Encuentre: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$.

3. Sean A y B eventos con P(A)=0,4; P(B)=0,7; y P($A \cap B$)=0,3

Encontrar y realizar el diagrama de Venn: P($A \cup B$), P($A \cup B^c$), P($A^c \cap B$), P($A - B$) y P$(A - B)^c$.

4. En una tienda se extraen tres jugos al azar y se determina si está bueno (B) o defectuoso (D). Considerar los eventos:

- A = El segundo resultó bueno
- B = Se obtuvo uno solo defectuoso
- C = No hubo defectuosos

5. Si el número de jugos defectuosos es n = 8 y el total de artículos en inventario es N=20 determinar: P(A), P(B) y P(C), Considere selecciones con y sin reemplazo. Realice diagramas de árbol.

6. En una lechería el 70% de la producción es utilizada en producción de leche. Por otro lado, el 60% de la producción que no es leche (yogurt, manjar, queso, entre otros) proviene del Carchi y el 10% de la producción que se comercializa como leche proviene del Carchi. Se elige un día en particular. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca leche si la materia prima

- Proviene del Carchi
- No proviene del Carchi

7. Las principales causas de contaminación bacteriana de la leche del tanque de frío son la leche producida por vacas infectadas. Ante una infección mamaria los recuentos de bacterias en muestras de leche de vacas individuales pueden resultar muy altos, alcanzando en casos de mastitis clínicas, por ejemplo, los 1×107 UFC/ml, particularmente en infecciones por estreptococos. Cuando ocurre contaminación en leche, las autoridades de control de enfermedades (AGROCALIDAD) hacen un examen a las vacas para determinar la presencia de mastitis. Se sabe que, si las vacas tienen mastitis, el análisis resultará positivo en el 97% de los casos. Por otro lado, el examen puede, erróneamente, resultar positivo en 0,2% de los casos. Suponiendo que en el 1% de las leches contaminadas las vacas tengan mastitis. ¿Cuál es la probabilidad de que en un caso en que el examen resultó positivo, la leche esté contaminada con estreptococos (mastitis)?

8. En un paquete de 80 fundas de compotas se sabe que el 75% se encuentra dentro del rango de la fecha de vencimiento. Si se extraen tres fundas al azar, determinar:

- El espacio muestral
- La probabilidad de que ninguna funda esté vencida
- La probabilidad de que al menos una funda esté vencida

- La probabilidad de que las tres fundas estén en el plazo de vida útil.

9. Un grupo de profesores de FIACA planean asistir a un congreso de Sustentabilidad a llevarse a cabo en Venezuela en Julio 2019. En el grupo de investigación SOCIEDAD SUSTENTABLE de la UPEC se encuentran 5 ingenieros de alimentos y 7 agrónomos, si se quiere incluir en el grupo que va a asistir 2 ingenieros de alimentos y 3 agrónomos. De cuántas maneras y con qué probabilidad se puede hacer si se quiere que:
- Incluir cualquier ingeniero de alimentos y cualquier agrónomo
- Un ingeniero de alimentos en particular debe asistir al congreso
- Dos agrónomos en particular no pueden asistir al congreso

10. Una caja contiene 8 chocolates marca Rechoco, 3 marca Bolita y 9 Amarguito. Si se sacan tres chocolates al azar, determinar la probabilidad de que:
- Los tres sean Rechoco.
- Los tres sean Bolita.
- Dos sean Rechoco y uno Bolita.
- Al menos uno sea Bolita.
- Que sea uno de cada marca.

11. Los empleados de una compañía de alimentos se encuentran separados en tres divisiones: Administración, Operación de planta y Ventas. La siguiente tabla indica el número de empleados en cada división clasificados por sexo:

		Sexo		
		Mujeres: M	**Hombres: H**	**Total**
Divisiones	**Administración: A**	20	30	50
	Operación de planta: O	60	140	200
	Ventas: V	100	50	150
	Total	180	220	400

Si se elige aleatoriamente un empleado, calcule la probabilidad de que:
- Sea mujer
- Sea hombre y trabaje en administración
- Sea mujer o trabaje en administración
- Trabaje en operación de planta si es mujer
- Sea mujer dado que trabaja en operación de planta
- Trabaje en administración y no sea hombre
- ¿El sexo de empleado está relacionado con la división en que trabaja?

12. En el sector Tierra Buena, un grupo de 12 agricultores que sembraron maíz en julio de 2018, cinco lograron conseguir crédito para la producción. Si se seleccionan al azar tres agricultores de ese grupo, cuál es la probabilidad de que:
- Ninguno de los seleccionados tenga crédito
- Al menos dos agricultores no tengan financiamiento

13. Una encuesta realizada para conocer la opinión de los consumidores acerca de un cereal a base de chocho y maíz en una comunidad, para ello se tomaron muestras en consumidores con diferentes razas y arrojaron los siguientes resultados:

		Opinión		
		Buena (B)	**Regular (R)**	**Mala (M)**
	Blancos	15	15	30
Razas	**Mestizos**	20	35	5
	Afroecuatorianos	10	40	10

1. ¿Es la opinión independiente de la raza?
2. Al seleccionar un consumidor al azar, determine la probabilidad de que:

- Su respuesta sea regular y sea mestizo
- Sea afroecuatoriano y su respuesta sea buena
- Su respuesta sea buena
- Sea mestizo
- Dado que es afroecuatoriano su respuesta sea regular
- Dado que su respuesta es mala sea afroecuatoriano.

14. Un lote de 10 boquillas para llenado de pasta dentífrica contiene una defectuosa. Si se eligen dos boquillas al azar para realizar una inspección de calidad. Se pregunta:

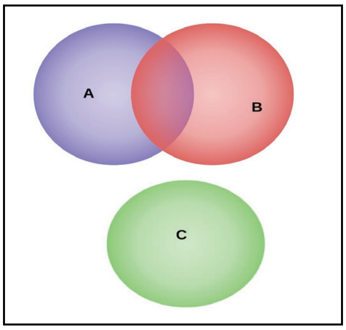
- ¿Cuántas combinaciones distintas de dos boquillas es posible obtener?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera boquilla extraída sea la defectuosa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una de las boquillas extraídas sea la defectuosa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las boquillas extraídas al azar no esté defectuosa?

15. Dados tres sucesos A, B y C en el espacio muestral S, tales que P(A)=1/2; P(C)=9/25; P($A \cap B$)=3/10; P($A \cap C$)=P($B \cap C$)=4/25; P($A \cap B \cap C$)=1/50.
Calcular las siguientes probabilidades:

- Que ninguno de los tres sucesos ocurra
- Que ocurra exactamente uno de los sucesos
- Que ocurran al menos dos sucesos
- Que ocurran exactamente los tres sucesos
- Que no ocurran más de dos sucesos

16. Sean A, B y C sucesos exhaustivos y mutuamente excluyentes en el espacio muestral S, siendo P(A^C)=2/3 y P(B^C)=1/2. Calcule la probabilidad de que no ocurra el suceso C.

17. En el siguiente diagrama de Venn se muestran tres eventos. Copie la figura y sombree la región que corresponda a cada uno de los eventos siguientes:



A^c

$(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$(A \cap B) \cup C$

$(C \cup B)^c$

$(A \cap B)^c \cup C$

18. Se selecciona una muestra de tres barras energéticas de una línea de fabricación y cada una de ellas se clasifica como defectuosa o aceptable. A, B y C denotan los eventos de que la primera, la segunda y la tercera barra esté defectuosa, respectivamente.

- Describa el espacio muestral para este experimento con un diagrama de árbol.
- Describa cada uno de los eventos siguientes:

▪ A
▪ B
▪ $A \cap B$
▪ $B \cup C$

19. Se analizan la cantidad de hongos y bacterias encontrados en un queso amasado. Los resultados de 100 quesos se resumen a continuación:

		Presencia de hongos	
		Baja	**Alta**
Presencia de bacterias	**Baja**	80	9
	Alta	6	5

- Si se selecciona un queso al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que la presencia de hongos sea alta y la presencia de bacterias sea alta?
- Si se selecciona un queso al azar, ¿Cuál es la presencia de bacterias sea alta o presencia de hongos sea alta?
- Si un queso tiene alta presencia de hongos, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga baja presencia de bacterias?
- Considérese el evento de que un queso tiene alta presencia de hongos y el evento de que un queso tiene alta presencia de bacterias ¿Estos dos eventos son mutuamente excluyentes? ¿Son independientes?

20. Un lote de 50 contenedores de jugo de naranja congelado contiene cinco que están defectuosos. Del lote se seleccionan tres al azar. Determine la probabilidad de que:

- Se seleccione un contenedor defectuoso
- Los tres contenedores seleccionados estén en perfecto estado
- Por lo menos uno de los contenedores esté en perfecto estado.
- Que el segundo contenedor seleccionado esté defectuoso y los dos restantes en perfecto estado.

21. Si P(A)=0,2 y P(B)=0,2 y A y B son mutuamente excluyentes, ¿Son independientes?

22. La probabilidad de que una prueba de laboratorio realizada en leche contenga niveles de contaminación altos es 0,10. Se verifican cinco muestras independientes.

- ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna contenga niveles altos de contaminación?
- ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una contenga niveles altos de contaminación?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una contenga niveles altos de contaminación?

23. En una empresa, los clientes acostumbran evaluar en forma preliminar el diseño de las etiquetas de los productos alimenticios. En el pasado, 95% de los productos de gran éxito recibieron críticas favorables, 60% de los productos con un éxito moderado recibieron críticas favorables y 10% de los productos sin mucho éxito recibieron críticas favorables. Además, 40% de los productos han sido de gran éxito, 35% han sido de éxito moderado y 25% han sido productos sin mucho éxito.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un producto obtenga una crítica favorable?
- Si un diseño nuevo obtiene una crítica favorable, ¿Cuál es la probabilidad de que será un producto de gran éxito?
- Si un producto no consigue una crítica favorable, ¿Cuál es la probabilidad de que será un producto de gran éxito?

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 2 de los propuestos

S= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

A= {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

B= {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}

C= {(1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

A∪B= {(1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (6,1)}

A∪C= {(1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}= C

B∪C= {(1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}= C

A ∩ C= {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}= A

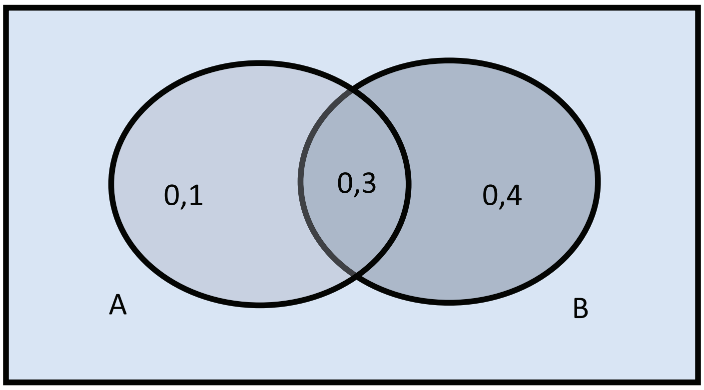
B ∩ C= {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}= B

A∪B∪C= {(1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}= C

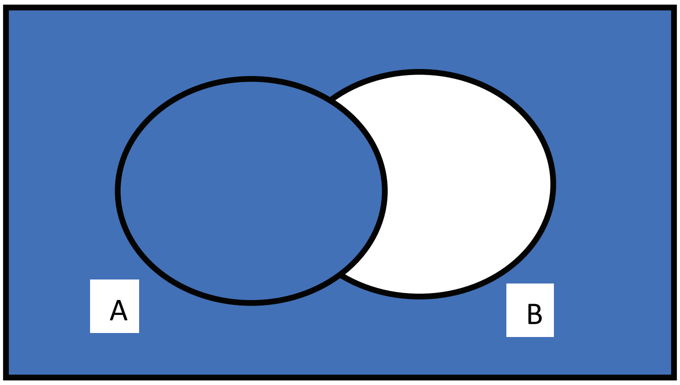
A∩B∩C= ∅ porque A∪B= ∅

Ejercicio 3 de los propuestos

P(A∪B)= P(A)+P(B)-P(A∩B)= 0,4+0,7-0,3= 0,8



$P(A \cup B^c) = 1 - P(B-A) = 0{,}6$

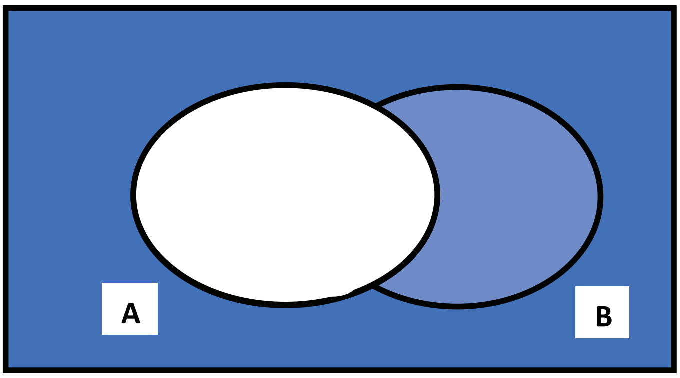


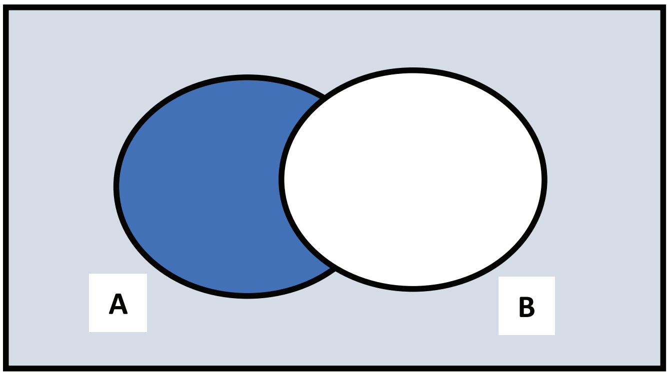
Otra forma sería:

$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) = P(A) + 1 - P(B) - P(A-B)$

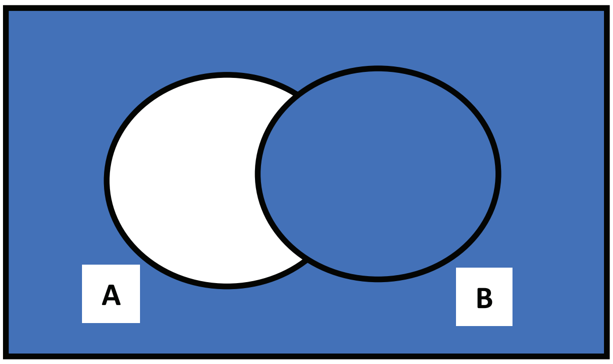
$P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(A \cap B)] = 0{,}4 + 1 - 0{,}7 - 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}6$

$P(A^c \cap B) = P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$

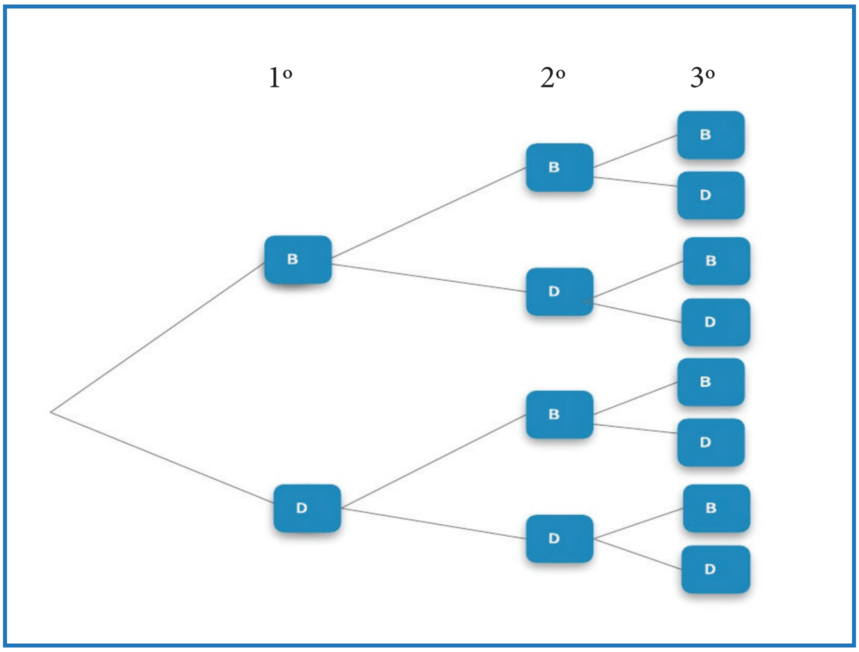




$P(A-B)^C = 1 - P(A-B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$



Ejercicio 5 de los propuestos



S= {BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD}

A= {BBB, BBD, DBB, DBD}

B= {BBD, BDB, DBB}

C= {BBB}

20 artículos: 8 defectuosos (D) y 12 buenos (B)

Con reemplazo:

P(D)=8/20= 0,4 P(B)= 0,6

P(A)= (0,6*0,6*0,6)+(0,6*0,6*0,4)+(0,4*0,6*0,6)+(0,4*0,6*0,4) = 0,6

P(B)=3*(0,62 * 0,4)=0,432

P(C)= 0,63 = 0,216

Sin reemplazo:

P(A)=(12/20 * 11/19 * 10/18) + (12/20 * 11/19 * 8/18) + (8/20 * 12/19 * 11/18)
+ (8/20 * 12/19 * 7/18) = 3/5

P(B)=(12/20 * 11/19 * 8/18) + (12/20 * 8/19 * 11/18) + (8/20 * 12/19 * 11/18)=44/95

P(C)=(12/20 * 11/19 * 10/18) = 11/57

Ejercicio 10 de los propuestos

$$P(3R) = \frac{{}_{8}C_{3}}{{}_{20}C_{3}} = 0{,}0491$$

$$P(3B) = \frac{{}_{3}C_{3}}{{}_{20}C_{3}} = 0{,}00088$$

$$P(2R,1B) = \frac{{}_{8}C_{2} * {}_{3}C_{1}}{{}_{20}C_{3}} = 0{,}0737$$

$$P(1B,2B,3B) = P(1B) + P(2B) + P(3B)$$

$$P(1B,2B,3B) = \frac{{}_{3}C_{1} * {}_{17}C_{2}}{{}_{20}C_{3}} + \frac{{}_{3}C_{2} * {}_{17}C_{1}}{{}_{20}C_{3}} + \frac{{}_{3}C_{3}}{{}_{20}C_{3}} = 0{,}4035$$

$$P(1R,1B,1A) = \frac{{}_{8}C_{1} * {}_{3}C_{1} * {}_{9}C_{1}}{{}_{20}C_{3}} = 0{,}0210$$

Ejercicio 11 de los propuestos

Parte a.

Se elige un empleado:

i. P(M)= 180/400= 9/20

ii. P(H A)= 30/400 = 3/40

iii. P(M A)= 20/400 = 2/40

iv.P(O/M)= P(O M)= 60/400= 1/3

P(M) 180/400

v. P(M/O)= P(O M)= 60/400= 3/10

P(O) 200/400

vi. P(A HC)= 20/400 = 2/40

Parte b.

P(A M)= P(A). P(M)

20/400 50/400 . 180/400

2/40 9/160

Por lo tanto el sexo está relacionado con la división en la cual se trabaje.

Ejercicio16 de los propuestos

$P(A^c)$= P(BUC)= 2/3
$P(B^c)$= P(AUC)= 1/2
$P(C^c)$= ?

P(A)= 1- $P(A^c)$= 1- 2/3 = 1/3
P(B) = 1- $P(B^c)$= 1- 1/2 = 1/2
P(C)= 1- [P(A) + P(B)] = 1-[1/3 + 1/2] = 1/6

$P(C^c)$= 1-P(C) = 1- 1/6= 5/6

Autoevaluación 2

1. Una empresa tiene cuatro fábricas que producen jugo de mora envasado. La producción se deposita en el mismo almacén. En un período determinado la fábrica A produjo el 20% de los jugos, la B el 40%, la C el 25% y la D el 15%. Los porcentajes de jugos con envases defectuosos fueron 1%, 2%, 1,3% y 0,5% respectivamente. Un jugo fue tomado al azar y resultó con envase defectuoso. ¿Cuáles son las probabilidades de que el jugo haya procedido de cada una de las fábricas?

2. En cierta fábrica procesadora de maíz, se tienen trabajando ciertas máquinas llenadoras que se encuentran en fase de evaluación para ser sacadas de funcionamiento. La máquina A produce artículos defectuosos con una relación de 1:9, la máquina B saca artículos defectuosos el 15% de las veces, y la máquina C produce artículos en perfecto estado con una probabilidad de 0,875. Sea el experimento aleatorio de seleccionar al azar tres artículos, uno por cada una de las máquinas, y observar en cada uno si el artículo está defectuoso o no.

a. Describir el espacio muestral

b. Si el evento A= Dos o más artículos defectuosos y B= Menos de tres artículos defectuosos. Calcule: P(A), P(B), P($A \cap B$)

3. En el departamento de control de calidad de una empresa alimentaria, el 70% son hombres y el resto mujeres. Entre los hombres, el 15% son Químicos, el 40% son Ingenieros de alimentos y el resto no posee formación universitaria. Entre las mujeres, el 20% son Químicas, el 10% son Ingenieros de alimentos y el resto no posee formación universitaria.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador elegido al azar sea un hombre que no posee formación universitaria?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador elegido al azar posea formación universitaria?

c. Si un trabajador elegido al azar posee formación universitaria. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador elegido al azar que no posee formación universitaria, sea mujer?

e. ¿Son el sexo y el nivel educativo de los trabajadores, estadísticamente independientes?

4. Si A, B y C son eventos mutuamente excluyentes con P(A)=0,2, P(B)=0,3 y P(C)=0,4, determine las siguientes probabilidades: P($A \cup B \cup C$); P($A \cap B \cap C$); P($A \cap B$); P[($A \cup B$)$\cap C$]

CAPÍTULO 3

Variables aleatorias con aplicaciones En el área de salud

Relacionado con el ODS 3"Salud y bienestar." Este ODS pretende garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos.

CONCEPTOS BÁSICOS

Una variable X es aleatoria si es una magnitud susceptible de tomar diversos valores con determinadas probabilidades. En forma más precisa: Es una función de valor real definida sobre un espacio muestral S, que transforma los resultados de S en puntos sobre la recta de los números reales.

Se dice que X es "aleatoria" porque involucra la probabilidad de los resultados del espacio muestral, de manera que transforma todos los posibles resultados del espacio muestral en cantidades numéricas.

Una variable aleatoria es "discreta" cuando únicamente puede tomar un determinado número de valores en un intervalo.

Una variable aleatoria es "continua" cuando puede tomar cualquier valor en un intervalo.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD EN VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

DEFINICIÓN: Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamará p(x) = P(X = x) a la función de probabilidad de la variable aleatoria X, si satisface las siguientes propiedades:

$$0 \leq p(x) \leq 1$$

$$\sum_{x} p(x) = 1$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Se refiere a la colección de los valores de X con sus respectivas probabilidades.

DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA

La función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico de x, y está dada por: $F(x)=P(X \leq x)$

La función de distribución acumulativa X es una función no decreciente de los valores de X, de tal manera que:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$F(x_i) \geq F(x_j) \quad \text{si } x_i \geq x_j$$

$$P(X \geq x) = 1 - F(x)$$

$$P(X = x) = F(x) - F(x-1)$$

$$P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i)$$

VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Es el valor promedio de una variable aleatoria después de un número grande de experimentos.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum \mathrm{x} \ \mathrm{p}(\mathrm{x})$$ Ecuación 26

Ejemplo 1

Suponga que en una mañana en un consultorio médico llegan X pacientes tal como se muestra en la distribución de probabilidad de la tabla 15. ¿Cuál es el valor esperado de pacientes en ese consultorio?

Solución:

X = Nº de pacientes

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=0}^{10} \mathrm{x}_i \ \mathrm{p}(\mathrm{x} \ )$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = (0*1/10) + (1*1/10) + \cdots + (9*1/10)$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4{,}5$$

Tabla 15. Distribución de probabilidad de la variable aleatoria X

x_i	$P(x_i)$
0	1/10
1	1/10
2	1/10
3	1/10
4	1/10
5	1/10
6	1/10
7	1/10
8	1/10
9	1/10

Ejemplo 2

El director de un hospital sabe que las probabilidades de que lleguen por emergencia 0, 1, 2, 3, 4 o 5 heridos graves por accidentes de tránsito en un cierto día son 0,21; 0,37; 0,25; 0,13; 0,03 y 0,01 respectivamente.(Tabla 16) ¿Cuántos heridos graves por accidentes de tránsito deben esperarse que ocurran por día?

<u>Solución:</u>

Tabla 16. Distribución de probabilidad de X = N° de heridos graves por accidentes de tránsito

x_i	$P(x_i)$
0	0,21
1	0,37
2	0,25
3	0,13
4	0,03
5	0,01

$$E(X) = \sum_{i=0}^{5} x_i P(x_i)$$

$$E(X) = (0*0{,}21) + (1*0{,}37) + (2*0{,}25) + (3*0{,}13) + (4*0{,}03) + (5*0{,}01)$$
$$E(X) = 1{,}43$$

El valor esperado de heridos graves por accidentes de tránsito es de 1,43.

Propiedades de E(X)

$E(c) = c$

$E(aX + b) = aE(X) + b$

$E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)]$

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

La varianza de una variable aleatoria es una medida de dispersión de la distribución de esta.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \text{Ecuación 27}$$

Propiedades de V(X).
$Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$
$Var(c) = 0$ donde a, b y c son constantes

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES DISCRETAS

p(x,y) = p (X = x, Y = y)

Condiciones

$p(x,y) \geq 0$

$$\sum_X \sum_Y p(x,y) = 1$$

La función de distribución acumulativa viene dada por:

Distribuciones marginales de Probabilidad

$Py(x) = \sum_y p(x, y)$
$Px(y) = \sum_x p(x, y)$

Momentos y funciones generadoras de momentos

La función generadora de momentos es la determinación de los momentos de las distribuciones. Su contribución más importante es establecer distribuciones de funciones de variables aleatorias.

Si $g(X) = X^r$ para r=0,1,2,3,.... . El r-ésimo momento alrededor del origen de la variable aleatoria X, se denota como $\mu r'$.

El r-ésimo momento alrededor del origen de la variable aleatoria X está dado por:

$$\mu_r' = E(X') = \begin{cases} \sum_r x^r f(x) \text{ si X es discreta} & \text{Ecuación 28} \\ \int_{-\propto}^{\propto} x^r f(x)dx \text{ si X es continua} & \text{Ecuación 29} \end{cases}$$

$$\mu_3' = E(X^3)$$
$$\mu_2' = E(X^2)$$
$$\mu = E(X)$$

Caracterización de la Asimetría

$$\mu_{2X} = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - 2E(X)\mu + \mu^2 = \mu_2' - \mu^2 = V(X)$$
$$\mu_{3X} = E(X-\mu)^3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$$
$$\alpha_{3X}^* = \frac{\mu_{3X}}{(\mu_{2X})^{3/2}} \qquad \text{Ecuación 30}$$

Si α_{3X}^{*} >0 es asimétrica positiva

Si α_{3X}^{*} <0 es asimétrica negativa

Si la distribución es simétrica, entonces α_{3X}^{*} =0. El recíproco no es cierto: es un error común asegurar que si α_{3X}^{*} =0 entonces la distribución es simétrica (lo cual es falso).

Caracterización de la Curtosis

$$\mu_{4X} = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4$$

$$\alpha_{4X}^{*} = \frac{\mu_{4X}}{(\mu_{2X})^2}$$ Ecuación 31

Si α_{4X}^{*} <3 es Platicurtica: menos apuntada y con colas más anchas que la normal.

Si α_{4X}^{*} =3 es Mesocurtica: cuando tiene una distribución normal

Si α_{4X}^{*} >3 es Leptocurtica: más apuntada y con colas menos anchas que la normal.

Covarianza

Mide la variabilidad conjunta de X e Y o también mide la asociación lineal entre X e Y. Se define como:

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$$ Ecuación 32

Coeficiente de correlación

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$ Ecuación 33

Si X e Y son independientes ρ=0; pero si ρ=0 no indica que X e Y son independientes.

Ejemplo 1

Los datos de tabla 17, ¿muestran que X y Y son Independientes?

Tabla 17.
Distribución de probabilidad conjunta de X e Y

y / x	**-1**	**0**	**1**	Total
-1	1/16	3/16	1/16	5/16
0	3/16	0	3/16	6/16
1	1/16	3/16	1/16	5/16
Total	5/16	6/16	5/16	1

No son independientes pero...

$$E(XY) = \sum X * Y * p(x, y) = (-1)(-1)(1/16) + (0)(-1)(3/16) + (1)(-1)(1/16) + \cdots$$
$$= 1/16 - 1/16 - 1/16 + 1/16 = 0$$

$E(X) = \sum_X Xp(x) = (-1)(5/16) + (0)(6/16) + (1)(5/16) = 0$ de igual forma E(Y) =0 por lo que Cov (X,Y)=0 y $\rho = 0$.

Se puede concluir que no existe una relación lineal entre X y Y, sin embargo, es posible que exista otra relación no lineal porque no son independientes.

Ejemplo 2

Considérese el experimento aleatorio que consiste en el orden de llegada de pacientes a un consultorio. Se definen las variables aleatorias:

- X = número de mujeres.
- Y = número de corridas o rachas.

En la tabla 18 se describe el espacio muestral del referido experimento y se señalan los valores de las variables aleatorias definidas.

Tabla 18.

Espacio muestral y valores de X e Y

Espacio muestral	**X = Nº de mujeres**	**Y = Nº de rachas**
MMMM	4	1
MMMH	3	2
MMHM	3	3
MHMM	3	3
HMMM	3	2
MMHH	2	2
MHMH	2	4
MHHM	2	3
HMHM	2	4
HHMM	2	2
HMMH	2	3
MHHH	1	2
HMHH	1	3
HHMH	1	3
HHHM	1	2
HHHH	0	1

En el mismo espacio muestral se pueden definir dos o más variables aleatorias que pueden ser estudiadas por separado, ó como se verá en la tabla 19 se puede establecer la Distribución de Probabilidades Conjuntas de X, Y.

Nótese que se pueden obtener las funciones de probabilidad marginal. También es posible obtener la covarianza de (X, Y) como:

$$COV(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y) \qquad \text{Ecuación 34}$$

Es factible determinar si las variables aleatorias X y Y son independientes, si se verifica que:

$P(X = x, Y = y) = P(x, y) = f_x(y).\ f_y(x)$ para todos los pares (x, y).

Tabla 19.
Distribución de Probabilidades Conjuntas de X, Y.

		X = Nº de mujeres					
		0	1	2	3	4	$f_x(y)$
Y = Nº de rachas	1	1/16	0	0	0	1/16	2/16
	2	0	2/16	2/16	2/16	0	6/16
	3	0	2/16	2/16	2/16	0	6/16
	4	0	0	2/16	0	0	2/16
	$f_y(x)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1

EJERCICIO: Para las variables definidas en el ejemplo anterior, determinar:

- Cov (X, Y)
- ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD EN VARIABLES ALEATORIAS CONTÍNUAS

DEFINICIÓN: Se dice que una variable aleatoria es continua si en un intervalo dado, ésta toma infinitos valores (no contables) que se pueden hacer corresponder con los números reales.

Ejemplo 1

Se toman "n" muestras de sangre para realizar análisis de hemoglobina. Para ello se cuenta con un equipo con una apreciación de un decimal. Supóngase que se obtuvo una lectura de 13,3. Observación: ¡nótese que este valor pudiera ser un promedio entre 13,25 y 13,35!; por lo tanto, en el caso de las V.A continuas es más lógico visualizar las probabilidades de intervalos que de puntos en particular.

DEFINICIÓN: La distribución de probabilidades de una variable aleatoria continua X está caracterizada por dos funciones a saber:

La función f(x) denominada función de densidad de probabilidades (f.d.p).
La función F(x) denominada función de distribución acumulativa (F.D.A).

Ejemplo 2

En un hospital cardiológico se toma la frecuencia cardiaca de los pacientes al egreso, la cual se transcribe a una base de datos. En la tabla 20 y figura 29 se presentan los resultados de tales determinaciones realizadas sobre 210 pacientes.

Tabla 20.

Resultados de frecuencia cardiaca (FC) de pacientes al egreso de una hospitalización.

FC	N° de Pacientes	Frecuencia relativa (%)
$40< x \leq 52$	4	1,9
$52< x \leq 64$	69	32,9
$64< x \leq 76$	97	46,2
$76< x \leq 88$	28	13,3
$88<x \leq 100$	11	5,2
$100< x \leq 112$	1	0,5
Total	210	100,0

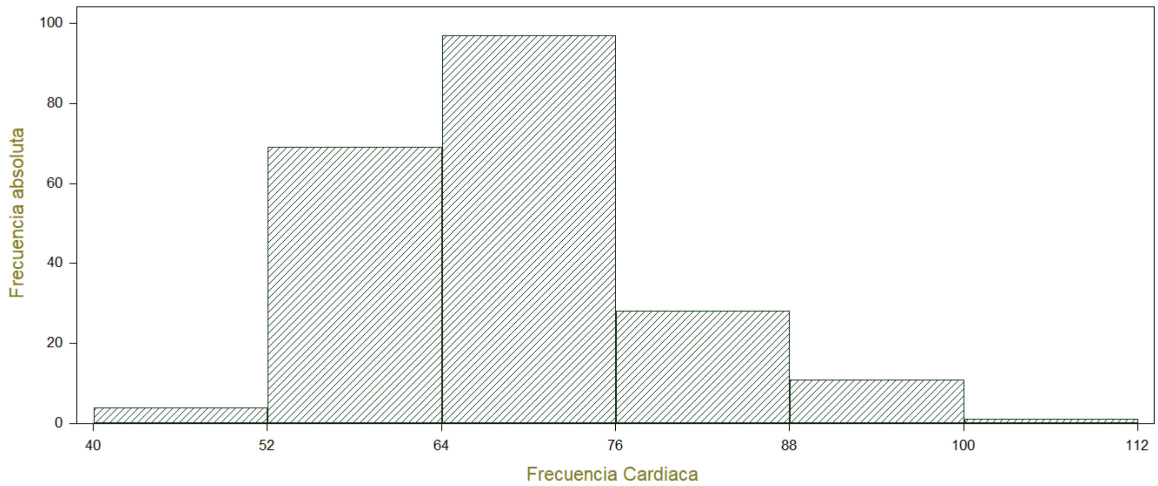


Figura 29. Histograma de Frecuencia Cardíaca al egreso

En la Figura 29 se muestra un histograma de frecuencias absolutas realizado con la información presentada en la tabla 20. Se puede apreciar una tendencia que indica una distribución centrada alrededor de 64 a 76 latidos por minutos.

Supóngase ahora que el número de muestras se hace muy grande (tendiente a infinito) y los intervalos de clase se hacen muy pequeños (tendientes a cero), entonces (figura 30):

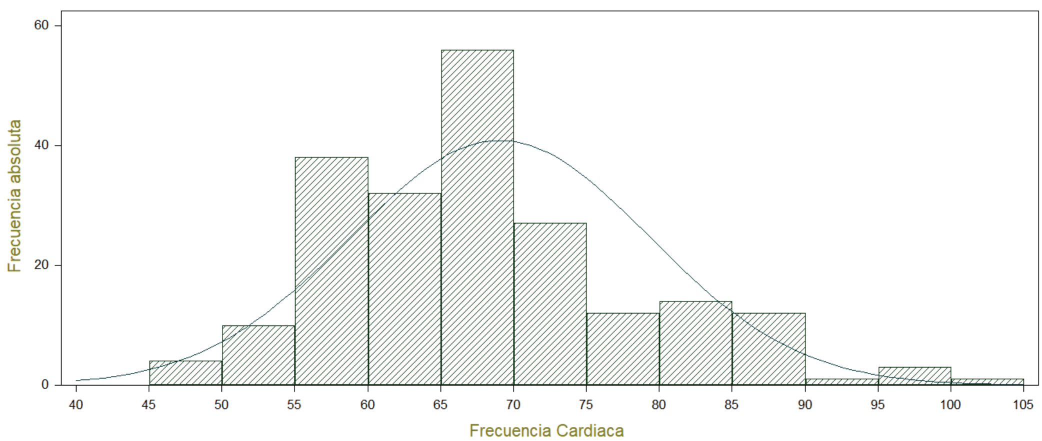


Figura 30. Histograma de Frecuencia Cardíaca al egreso

Se genera un fenómeno de regularidad probabilística que permitiría definir claramente una curva, tal como se refleja en la figura 31.

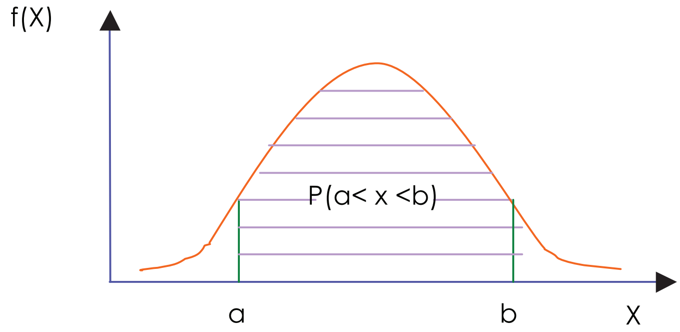


Figura 31. Regularidad probabilística de una variable aleatoria X

La probabilidad de encontrar valores de x entre los puntos a y b puede ser vista como un área bajo la curva definida por la función de densidad de probabilidades, bajo ciertas condiciones.

DEFINICIÓN: Si existe una función f(x) tal que cumpla con las siguientes condiciones para cualesquiera valores de a y b:

$$f(x) \geq 0 \ ; \ -\infty \leq x \leq \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

entonces f(x) es la función de densidad de probabilidad (f.d.p) de la V.A. continua X.

DEFINICIÓN: La función de distribución acumulativa (F.D.A) (figura 32) de una variable aleatoria continua X, es aquella que proporciona la probabilidad de que dicha variable tome un valor menor o igual a algún valor x específico en el dominio de la función. Ello es denotado de la siguiente manera:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad \text{Ecuación 35}$$

Propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(\infty) = 1$
3. $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$; (función no decreciente).
4. $\dfrac{\partial F(x)}{\partial (x)} = f(x)$; ó $F'(x) = f(x)$

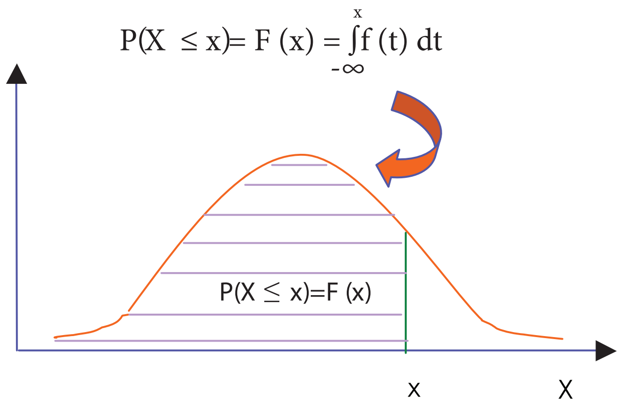


Figura 32. Distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria X

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Decir cuáles de estas variables son discretas y cuáles son continuas:

- Edad de los pacientes con obesidad ingresados en un hospital.
- Pacientes con tabaquismo independiente del tiempo de consumo: NO=0 y SI=1.
- Temperaturas medidas en pacientes en sala de emergencia cada media hora.
- Valor de Troponina cuantificada al ingreso expresado en nanogramos por mililitro (Absoluto). Valores de referencia: 0,64=1; 0,33=2; ultrasensible=3; Otros=4.
- Presión arterial sistólica al ingreso de hospitalización en milímetros de mercurio mmHg (Valor absoluto).
- Ecocardiograma en la cual se evidencie fracción de eyección del ventrículo izquierdo menor a 45%: NO=0 y SI=1.
- Valor de Creatinina al ingreso de hospitalización expresada en Unidades Internacionales por litro (Absoluto).
- Clase funcional según NYHA (New York Heart Association): 0, I =1, II=2, III=3 y IV=4.

2. Dar el dominio de las siguientes variables y decir si son discretas o continuas:

- Suma de los puntos obtenidos al lanzar un par de dados.
- Diámetro de una esfera.
- Número de caras al lanzar tres monedas.
- Temperatura corporal.

3. Dos promotores de una nueva medicina para asma, A y B, visitan de 8 a 12 farmacias por semana, respectivamente. Sean X e Y dos variables aleatorias que representan el número de establecimientos que aceptan expender la medicina promocionada por los vendedores A y B respectivamente, como resultado de las visitas. Con base en una gran cantidad de información, las probabilidades para los valores de X e Y son las siguientes:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(x)	0,02	0,09	0,21	0,28	0,23	0,12	0,04	0,01
Y	0	1	2	3	4	5	6	7
P(y)	0,06	0,21	0,28	0,24	0,13	0,05	0,02	0,01

- Escoger a aquel promotor que presente menor variabilidad.
- Caracterizar la asimetría y la curtosis de la variable X (Vendedor A).

4. Una vacuna al aplicarse presenta en muchos casos hematoma en el paciente. En una clínica trabajan tres enfermeras con diferentes destrezas en la colocación de la vacuna. La enfermera 1 no produce hematoma a uno de cada tres pacientes, la enfermera 2 no produce hematoma a uno de cada cuatro pacientes, y la enfermera 3 produce hematoma en dos de cada cuatro aplicaciones. Sea el experimento aleatorio de seleccionar al azar tres pacientes vacunados, una por cada uno de las enfermeras, y observar en cada una si presenta hematoma o no.

a. Describir el espacio muestral
b. Hallar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X= vacunados que presentan hematoma
c. Hallar la probabilidad de que:
- Presenten hematomas dos o más pacientes.
- Presenten hematomas menos de tres pacientes
d. Calcular P($1 \leq x < 3/x \geq 2$)
e. Hallar E(X), V(X), E(3X+1/2), V(4+5X)

5. Un laboratorio que elabora jarabe para la tos despacha su producción al mercado por lotes. Cada lote contiene un determinado número de cajas el cual varía de acuerdo al pedido realizado por cada cliente. La distribución del número de cajas es de la siguiente manera:

Nº de cajas	15	16	17	18	19	20
Probabilidad	0,25	0,10	0,35	0,05	0,15	0,10

Calcular:

- E(6X-4)
- V(4X+7)
- La probabilidad de encontrar 16 o más cajas por lote.
- La probabilidad de encontrar más de 18 o menos de 16 cajas inclusive.
- Si al revisar un lote cualquiera se encuentran por lo menos 16 cajas. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren entre 15 y 17 cajas ambas inclusive?

6. Sea X una variable aleatoria que representa la magnitud de la desviación, a partir de un valor prescrito, del peso neto de ciertos recipientes de leche en polvo para bebes, los que se llenan mediante una máquina. La función de densidad de probabilidad de X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & \rightarrow 0 < x < 10 \\ 0 & \rightarrow \text{Cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar: F(x), E(x), V(x), P(x>5).

7. Sea X una variable aleatoria continua que representa la distancia recorrida por un conductor para transportar la mercancía a un laboratorio de medicamentos, definida por la función:

$$f(x) = \begin{cases} k(1+x^2) & \rightarrow 0 < x < 3 \\ 0 & \rightarrow \text{Cualquier otro valor} \end{cases}$$

a. Hallar k para que f(x) sea una función de densidad de probabilidad
b. F(x), E(x), V(x)
c. Probabilidad de que x esté comprendida entre 1 y 2
d. Probabilidad de que x sea menor que 1
e. Sabiendo que x es mayor que 1, calcular la probabilidad de que sea menor que 2.

8. La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria X que representa el tiempo en horas de aparición de síntomas de un virus gripal luego del contagio, está dada por:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \rightarrow x<0\\ 2x-x^2 & \rightarrow 0\le x\le 1\\ 1 & \rightarrow \text{x}>1\end{cases}$$

Obtener:

- P(x<1/2), P(x>3/4)
- f(x)

9. Verifique que la siguiente es una función de densidad de probabilidad y determine las probabilidades que se piden.

$$\text{f(x)} = (8/7)(1/2)^{\text{X}} \qquad 1 \le x \le 3$$

P($x \le 1$)

P($x > 1$)

P($2 < x < 6$)

P($x \le 1 \cup x > 2$)

10. La elaboración de un medicamento consta de tres ingredientes que se adquieren de distintos proveedores, suponga que las probabilidades de que el primero, el segundo y el tercer proveedor cumplan con las especificaciones son 0,95; 0,98 y 0,99. Suponga que los proveedores son independientes.

- Construya la distribución de probabilidades para X= Número de proveedores que cumplen con las especificaciones.
- ¿Cuál es la probabilidad de que todos los proveedores cumplan con las especificaciones?
- ¿Cuál es la probabilidad de que entre dos y tres inclusive de los proveedores cumplan con las especificaciones?

11. El espesor de grasa abdominal (en mm) es una variable aleatoria con la siguiente función de distribución acumulada:

$$\text{F(x)}=\begin{cases}0 & \rightarrow x<1/8\\ 0{,}2 & \rightarrow 1/8\le x<1/4\\ 0{,}9 & \rightarrow 1/4\le \text{x} < 3/8\\ 1 & \rightarrow x\ge 3/8\end{cases}$$

Determine las siguientes probabilidades:

P($x \le 1/8$), P($x \le 1/4$),P($x \le 5/16$),P($x > 1/4$),P($x \le 1/2$)

12. Una variable aleatoria X tiene la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \rightarrow 1 \le x \le 2 \\ cx & \rightarrow 2 < x < 3 \\ 0 & \rightarrow \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

a. Encuentre el valor de la constante c
b. Encuentre:

i. P(X >2)
ii. P(1/2< X <3/2)
iii. E(X)
iv. V(X)
v. F(X)

13. Supóngase que la duración de una intervención quirúrgica, es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está determinada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4} & \rightarrow x > 0 \\ 0 & \rightarrow \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Determinar E(x), V(x).

14. Suponga que en un medicamento genérico el principio activo es el mismo al medicamento de marca reconocida, pero la proporción del excipiente no tiene por qué serlo mientras no afecte a la bioequivalencia. Cierto excipiente determina su peso específico lo que a su vez determina el precio. Suponga que en la producción de un medicamento la proporción de un excipiente es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(X) = \begin{cases} 6x(1-x) & \rightarrow 0 \le x \le 1 \\ 0 & \rightarrow \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

- Determinar E(X), V(X) y F(X).
- Si X<0,50 se tiene un medicamento con precio 1; si 0,50≤X≤0,80, se tiene un medicamento con precio 2; y si X>0,80, se tiene un medicamento con precio 3. Calcular los porcentajes de producción de cada tipo.

15. Supóngase que la vida útil de un medicamento tiene una duración X (en unidades de 1000 horas) que se considera como una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(X) = \begin{cases} e^{-x} & \rightarrow x > 0 \\ 0 & \rightarrow \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

Suponer que el costo de fabricación del medicamento es de \$2. El laboratorio vende el medicamento en \$5, pero garantiza reembolso total si $X \leq 0{,}9$. ¿Cuál es la utilidad esperada del laboratorio por medicamento producido?

16. Suponga que las variables aleatorias X y Y tienen una función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} c(2x+y) & \rightarrow 2 < x < 6; \quad 0 < y < 5 \\ 0 & \rightarrow \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Calcule el valor de la constante c
- Las funciones de distribución marginal para X y Y
- La Cov(X,Y)
- La V(3X+Y)
- P(3<X<4;Y>2)
- P(X>3)
- Verificar la independencia de las variables X y Y

17. Una persona desea estudiar la relación existente entre el poder adquisitivo de los profesionales de enfermería de Quito y los sueldos percibidos. Para ello, el investigador ha tomado una muestra de 200 enfermeros(as). Sea X= Poder adquisitivo y Y= Sueldo percibido, ambos en dólares x 100. Los resultados se presentan a continuación:

		Y			
		8	9	10	11
X	7	50	10	6	2
	8	40	10	5	1
	9	30	5	2	1
	10	30	5	2	1

a. Determinar si las variables son estadísticamente independientes
b. Calcular la covarianza y el coeficiente de correlación entre X e Y
c. P(x=1000, Y=800)
d. P(x>800/800<y<1000)
e. P(Y<900/X>800)
f. V(2x+3y)
g. V(5x-y)

18. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas en donde los posibles valores que éstas pueden tomar son -1, 0 y 1. En la siguiente tabla se dan las probabilidades conjuntas para todos los posibles valores de X y Y.

		X		
		-1	0	1
Y	-1	1/16	3/16	1/16
	0	3/16	0	3/16
	1	1/16	3/16	1/16

- Determinar las probabilidades marginales de X e Y.
- ¿Son X e Y independientes?
- Calcular el coeficiente de correlación entre X e Y.

19. La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias con distribución continua:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + xy) & \text{si } 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

- Determinar k, para que la función f sea una función de densidad de probabilidad.
- F(x,y)
- f(x), f(y)
- f(x/y)
- ¿Son X e Y independientes?
- Calcular el coeficiente de correlación entre X e Y
- $P(X>1/2, Y<1/4)$
- $P(Y\leq 1/4)$

20. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas. con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) & \text{si } x \geq 0; y \leq 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

- Determinar la función de distribución acumulativa conjunta.
- Obtener la probabilidad conjunta de que $P(X>1/2$ y $Y \leq 3/4)$
- Calcular COV(x,y)

21. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (3x - y)/5 & \text{si } 1 < x < 2; 1 < y < 3 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

- Determinar la función de distribución acumulativa conjunta.
- ¿Cuál es la probabilidad conjunta de que $x<3/2$ y $Y<1$?
- Obtener las funciones de densidad marginal de X e Y
- ¿Son X e Y estadísticamente independientes?
- Obtener COV(x,y) y ρ (x,y).

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 3 de los propuestos

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(X = x) = 0*0,02 + 1*0,09 + ... + 7*0,01 = 3,18$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.P(X = x) = 0^2*0,02 + 1^2*0,09 + ... + 7^2*0,01 = 12,06$$

$$V(X) = 12,06 - [3,18]^2 = 1,9476$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i.P(Y = y) = 0*0,06 + 1*0,21 + ... + 7*0,01 = 2,45$$

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.P(Y = y) = 0^2*0,06 + 1^2*0,21 + ... + 7^2*0 = 8,03$$

$$V(Y) = 8,03 - [3245]^2 = 2,0275$$

Tal como puede observarse en las varianzas de cada vendedor, el vendedor X presenta menor variabilidad.

$$\alpha_{3X}^* = \frac{\mu_{3X}}{(\mu_{2X})^{3/2}}$$

$$\mu_{3X} = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$$

$$\mu_3' = E(X^3) = 1^3*0,02 + ... + 8^3*0,01 = 51,1$$
$$\mu_2' = E(X^2) = 12,06$$
$$\mu = E(X) = 3,18$$

$$\mu_{3X} = 51,12 - (3*3,18*12,06) + 2*(3,18)^3 = 0,384864$$

$$\mu_{2X} = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - 2E(X)\mu + \mu^2 = \mu_2' - \mu^2 = V(X) = 1,9476$$
$$\alpha_{3X}^* = \frac{0.384864}{(1.9476)^{3/2}} = 0,1406 \qquad > 0 \;\; \text{Asimétrica positiva}$$

$$\alpha_{4X}^* = \frac{\mu_{4X}}{(\mu_{2X})^2}$$

$$\mu_{4X} = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4$$

$$\mu'_4 = 0^4 * 0{,}02 + ... + 7^4 * 0{,}01 = 235{,}86$$

$$\mu_{4X} = 235{,}86 - (4 * 3{,}18 * 51{,}12) + (6 * 3{,}18^2 * 12{,}06) - 3 * 3{,}18^4 = 10{,}56$$

$$\alpha^*_{4X} = \frac{10{,}56}{(1{,}9476)^2} = 2{,}78 \quad < 3 \text{ Platicurtica}$$

Ejercicio 4 de los propuestos

Parte a)

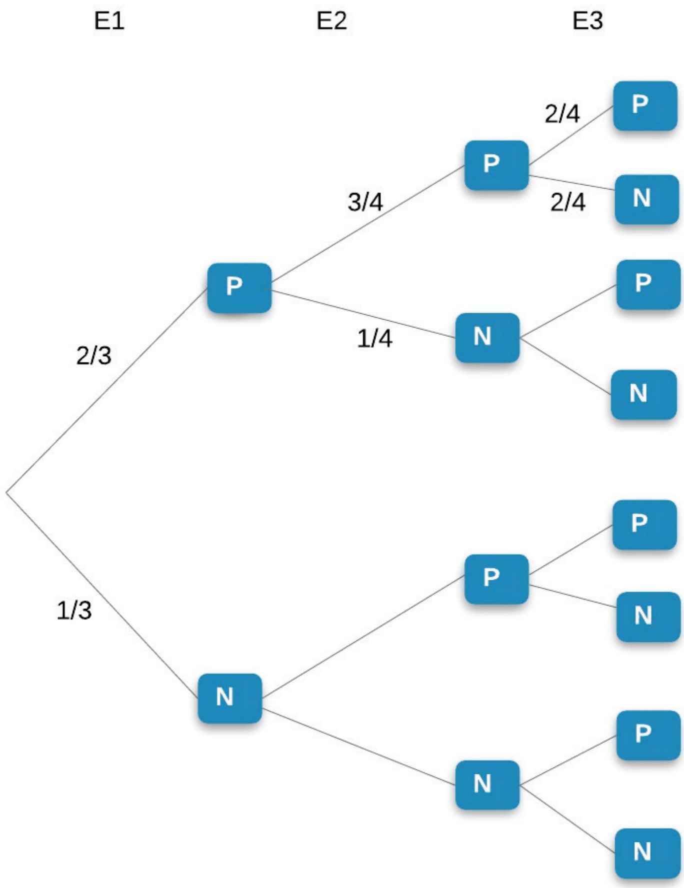


Tabla 21.
Cálculos de las probabilidades para el N° de vacunados que presentan hematoma.

X	S		
3	PPP	2/3 * 3/4 * 2/4 =	¼
2	PPN	2/3 * 3/4 * 2/4 =	¼
2	PNP	2/3 * 1/4 * 2/4 =	1/12
1	PNN	2/3 * 1/4 * 2/4 =	1/12
2	NPP	1/3 * 3/4 * 2/4 =	1/8
1	NPN	1/3 * 3/4 * 2/4 =	1/8
1	NNP	1/3 * 1/4 * 2/4 =	1/24
0	NNN	1/3 * 1/4 * 2/4 =	1/24

Parte b). Hallar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X.

Tabla 22.
Distribución de probabilidades de X= N° de vacunados que presentan hematoma

X	0	1	2	3	
P(X=x)	1/24	1/4	11/24	1/4	1
F(X)	1/24	7/24	3/4	1	

Parte c)

$P(X>2)= 1-P(X<2) = 1-7/24 =17/24$

$P(X<3)= P(X\leq 2) = F(2)= 3/4$

ó $\quad = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)= 1/24 + 1/4 + 11/24= 3/4$

Parte d)

$$P(1 \leq X < 3/X \geq 2) = \frac{P(1 \leq X < 3 \cap X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(2 \leq X < 3)}{1 - P(X < 2)} = \frac{P(X = 2)}{1 - P(X \leq 1)}$$

$$P(1 \leq X < 3/X \geq 2) = \frac{F(2) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{3/4 - 7/24}{1 - 7/24} = 11/17$$

Parte e)

$$E(X) = 1*1/4 + 2*11/24 + 3*1/4 = 23/12$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = 1^2 *1/4 + 2^2 *11/24 + 3^2 *1/4 = 13/3$$

$$V(X) = 13/3 - [23/12]^2 = 95/144$$

$$E(3X + 1/2) = 3 * E(X) + 1/2 = 3 * 23/12 + 1/2 = 25/4$$

$$V(4 + 5X) = 25 * V(X) = 25 * 95/144 = 2375/144$$

Ejercicio 7 de los propuestos

Parte a) $k\int_0^3 (1 + x^2)dx = 1 \Rightarrow k\left[x\big|_0^3 + x^3/3\big|_0^3\right] = 1 \Rightarrow k[3 + 3^3/3] = 1 \Rightarrow k = 1/12$

Parte b) $F(x) = \frac{1}{12}\int_0^x (1 + t^2)dt = \frac{1}{12}[t + t^3/3]_0^x = \frac{1}{12}[x + x^3/3]$

sustituyendo x=0 se tiene: $F(x) = \frac{1}{12}[0 + 0^3/3] = 0$

sustituyendo x=3 se tiene: $F(x)=\frac{1}{12}\left[3+3^3/3\right]=\frac{12}{12}=1$

Por lo tanto:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \frac{1}{12}\left[x+x^3/3\right] & 0<x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$$

$$E(x)=\frac{1}{12}\int_0^3 x(1+x^2)dx=\frac{1}{12}\left[x^2/2+x^4/4\right]_0^3=\frac{1}{12}\left[9/2+81/4\right]=33/16$$

$$V(x)=E(x^2)-\left[E(x)\right]^2$$

$$E(x^2)=\frac{1}{12}\int_0^3 x^2(1+x^2)dx=\frac{1}{12}\left[x^3/3+x^5/5\right]_0^3=\frac{1}{12}\left[9+243/5\right]=24/5$$

$$V(x)=24/5-\left[33/16\right]^2=699/1280$$

Parte c) $P(1<x<2)=\int_1^2 \frac{1}{12}(1+x^2)dx=\frac{1}{12}\left[x+x^3/3\right]_1^2=\frac{1}{12}\left[2+8/3-1-1/3\right]=5/18$

Parte d) $P(x<1)=F(1)=\frac{1}{12}\left[1+1^3/3\right]=1/9$

Parte e) $P(x<2/x>1)=\frac{P(x<2\cap x>1)}{P(x>1)}=\frac{P(1<x<2)}{P(x>1)}=\frac{5/18}{1-1/9}=5/16$

Ejercicio 12 de los propuestos

Parte a)

$$f(x)=c\int_1^2 x^2dx+c\int_2^3 xdx=1\Rightarrow c\left[x^3/3\Big|_1^2+x^2/2\Big|_2^3\right]=1\Rightarrow c\left[(8-1)/3+(9-4)/2\right]=1$$

$$\Rightarrow c*\frac{29}{2}=1\Rightarrow c=6/29$$

Parte b)

i. $P(x>2)=\frac{6}{29}\int_2^3 xdx=\frac{6}{29}\frac{x^2}{2}\Big|_2^3=\frac{6}{29}\left[9/2-4/2\right]=15/29$

ii. $P(1<x<3/2)=\frac{6}{29}\int_1^{3/2} x^2dx=\frac{6}{29}\frac{x^3}{3}\Big|_1^{3/2}=\frac{6}{29}\left[9/8-1/3\right]=19/116$

$$E(x)=\frac{6}{29}\int_1^2 xx^2dx+\frac{6}{29}\int_2^3 xxdx=\frac{6}{29}\left[x^4/4\Big|_1^2+x^3/3\Big|_2^3\right]$$

$$E(x) = \frac{6}{29}\left[16/4 - 1/4 + 27/3 - 8/3\right] = 121/58$$

iv. $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$$E(x^2) = \frac{6}{29}\int_1^2 x^2x^2dx + \frac{6}{29}\int_2^3 xx^2dx = \frac{6}{29}\left[x^5/5\Big|_1^2 + x^4/4\Big|_2^3\right]$$

$$E(x^2) = \frac{6}{29}\left[32/5 - 1/5 + 81/4 - 16/4\right] = 1347/290$$

$$V(x) = 1347/290 - [121/58]^2 = 0{,}2926$$

v. $F(x) = \frac{6}{29}\int_1^x t^2dt = \frac{6}{29}\frac{t^3}{3}\Big|_1^x = \frac{6}{29}\left[x^3/3 - 1/3\right] = \frac{2}{29}(x^3 - 1) \quad 1 < x < 2$

sustituyendo x=1 se tiene $F(x) = \frac{2}{29}(1^3 - 1) = 0$

sustituyendo x=2 se tiene $F(x) = \frac{2}{29}(2^3 - 1) = 14/29$

$$F(x) = \frac{14}{29} + \frac{6}{29}\int_2^x tdt = \frac{14}{29} + \frac{6}{29}\frac{t^2}{2}\Big|_2^x = \frac{14}{29} + \frac{3}{29}\left[x^2 - 4\right] = \frac{3}{29}x^2 + \frac{2}{29}$$

sustituyendo x=3 se tiene $F(x) = \frac{3}{29}3^2 + \frac{2}{29} = 29/29 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ F(x) = \frac{2}{29}(x^3 - 1) & 1 < x < 2 \\ F(x) = \frac{1}{29}(3x^2 + 2) & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 17 de los propuestos

Parte a)

P(x,y)=P(x)*P(y)

P(x=7,y=8) = P(x=7)*P(y=8)

$50/200 \stackrel{?}{=} 68/200 * 150/200$

$50/200 \neq 51/200$

Por lo tanto las variables X y Y no son estadísticamente independientes.

Parte b)

$$Cov(x, y) = E(x, y) - E(x)E(y)$$
$$E(x, y) = \sum\sum x_iy_iP(X = x_i, Y = y_i)$$

$$E(x, y) = (7*8*50/200) + (7*9*10/200) + ... + (10*11*1/200) = 68{,}88$$
$$E(x) = \sum_x x_i P(X = x_i) = (7*68/200) + ... + (10*38/200) = 8{,}23$$
$$E(y) = \sum_y y_i P(Y = y_i) = (8*150/200) + ... + (11*5/200) = 8{,}37$$
$$Cov(x, y) = 68{,}88 - (8{,}23*8{,}37) = -0{,}046$$

$$\rho_{(x,y)} = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{V(x)*V(y)}}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$E(x^2) = \sum_x x_i^2 P(X = x_i) = (7^2 * 68/200) + ... + (10^2 * 38/200) = 68{,}97$$
$$V(x) = 68{,}97 - [8{,}23]^2 = 1{,}23$$

$$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$$

$$E(y) = \sum_y y_i^2 P(Y = y_i) = (8^2 * 150/200) + ... + (11^2 * 5/200) = 70{,}67$$
$$V(y) = 70{,}67 - [8{,}37]^2 = 0{,}53$$

$$\rho_{(x,y)} = \frac{-0{,}046}{\sqrt{1{,}23*0{,}53}} = -0{,}056$$

Parte c)

$$P(x = 1000, y = 800) = 30/150$$

Parte d)
$$P(x > 800 / 800 < y < 1000) = \frac{P(x > 800 \cap 800 < y < 1000)}{P(800 < y < 1000)} = \frac{5/200 + 5/200}{30/200} = 10/30$$

Parte e)
$$P(y < 900 / x > 800) = \frac{P(y < 900 \cap x > 800)}{P(x > 800)} = 15/19$$

Parte f)

$$V(2x + 3y) = 4*V(x) + 9*V(y) + 2*2*3Cov(x, y)$$
$$V(2x + 3y) = 4*1{,}23 + 9*0{,}53 + 12*(-0{,}046) = 9{,}20$$

Parte g)
$$V(5x - y) = 25*V(x) + V(y) - 2*5*1*Cov(x, y)$$
$$V(5x - y) = 25*1{,}23 + 0{,}53 - 10*(-0{,}046) = 31{,}92$$

Autoevaluación 3

1. En un laboratorio farmacéutico existen 100 termómetros y se sabe que 25 no funcionan. Sea el experimento de seleccionar aleatoriamente tres termómetros y determinar si funciona o no:

- Obtener el espacio muestral
- Hallar la distribución de probabilidades para la variable aleatoria X=N° de termómetros que funcionan de tres seleccionados al azar.

Calcular:

$P(x > 1)$

$P(x \leq 2)$

$P(1 < x < 3)$

$P(x > 1 \cup x < 3)$

$P(x \geq 2/1 < x \leq 3)$

Hallar: E(X), V(X), E(3X+5), V(4X+1)

2. Sea X una variable aleatoria continua.

- Determinar el valor de k para que la función sea la función de densidad de probabilidad de X.

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/5} & \rightarrow x > 0 \\ 0 & \rightarrow \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Calcular P($x \leq 5$) y P($0 \leq x \leq 8$)
- Determinar F(x), E(x), V(x).

3. La función de probabilidad conjunta para las variables aleatorias X y Y está dada por:

		Y		
		0	1	2
X	0	1/18	1/9	1/6
	1	1/9	1/18	1/9
	2	1/6	1/6	1/18

- Encontrar las probabilidades marginales de X y de Y.
- Calcular las siguientes probabilidades: P(1≤X<3, Y≤1); P(1≤X<3/Y≤1)

  ¿X y Y son independientes?
- Calcular el coeficiente de correlación entre X y Y
- Calcular la V(2X+4Y) y verificar que E(X+2Y) = E(X)+2E(Y)

CAPÍTULO 4

Variables aleatorias discretas con aplicaciones a la ingeniería industrial

Relacionado con el ODS 12 "Producción y consumo responsables." Este ODS pretende garantizar modalidades de consumo y producción sostenibles.

CONCEPTOS BÁSICOS

Existen distintas funciones de distribución teóricas, cada una de las cuales está basada en un modelo de comportamiento del proceso que generó el universo de observaciones. La aplicación de cada una de estas distribuciones teóricas a una población particular está justificada si las suposiciones del modelo de comportamiento del proceso que generó la población se cumplen.

Por ello, si se conoce el proceso, es decir, el conjunto de fenómenos que dieron lugar a la población de mediciones u observaciones, y además estamos seguros de que el mismo se ajusta a un modelo de comportamiento determinado, entonces se puede decir que la distribución de probabilidades de nuestra población es la que corresponde al modelo. En la práctica se sabe que ciertos procesos y fenómenos generan resultados numéricos cuya distribución de probabilidades se puede ajustar a determinados modelos teóricos.

Existen muchas distribuciones teóricas, como la Distribución Binomial, la Poisson, la Exponencial, la de Weibull, entre otras. Cada una de ellas tiene su propio campo de aplicación, que se sostiene en un determinado comportamiento de los fenómenos, y al aplicarla se está haciendo en forma implícita la suposición de que cumplen las suposiciones del modelo subyacente.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

El número de aciertos en (n) ensayos es una variable aleatoria que tiene la distribución de probabilidad binomial o simplemente la distribución binomial. Se harán las siguientes suposiciones:

- Existe un número fijo de intentos o ensayos.
- La probabilidad de un evento es la misma en cada intento.
- Todos los intentos o ensayos son independientes.
- La probabilidad de obtener (r) éxitos seguidos por (n – r) fracasos es:

$$p^r(1-p)^{n-r} = p^r q^{n-r}$$ Ecuación 36

de esta manera se ha considerado un grupo o una sola combinación de (r) eventos en particular, esto es, se comenzó con (r) éxitos y se terminó con (n – r) fracasos.

El número posible de ordenaciones o la cantidad de selecciones de (r) éxitos y (n–r) fracasos en (n) ensayos es nCr. Por ello la probabilidad de que un evento tenga éxito (r) veces es:

$$P(X=r)=P_r={}_nC_r\,p^r q^{n-r}=\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$$ Ecuación 37

$${}_n\mathrm{C}_\mathrm{r}=\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{r}!(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}=\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}$$ donde 0! =1 y n! = n(n-1)(n-2)….x2x1 por ejemplo 5!= 5x4x3x2x1

Las Tablas de los valores de la distribución acumulativa binomial, se encuentran en el Anexo 2, Tabla A.

Ejemplo 1

Se lanzan al aire dos monedas. Hallar la probabilidad de obtener:

- Ninguna cara
- Una cara
- Dos caras

Solución:

X = N° de caras $X \sim bi(x,n,p)$

n =2
x =0
p =1/2
q =1/2

Por fórmula: $$P(X=0)=\binom{2}{0}(1/2)^0(1/2)^2$$

$$P(X=0)=1*1*1/4=0{,}25$$

Por tabla: $P(X=0)=F(0)=0{,}25$

n =2
x =1
p =1/2

Por tabla: $$P(X=1)=F(1)-F(0)=0{,}75-0{,}25$$
$$P(X=1)=0{,}50$$

n =2
x =2
p =1/2

Por tabla: $$P(X=2)=F(2)-F(1)=1-0{,}75$$
$$P(X=2)=0{,}25$$

Ejemplo 2

La probabilidad de que el motor de un avión se accidente en un vuelo es 0,01. Si los 4 motores funcionan independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que en un vuelo no se accidente ningún motor?

Solución:

X = Nº de motores accidentados $X \sim bi(x, n, p)$

n =4
x =0
p =0,01
q =0,99

Por tabla: $P(X=0) = F(0) = 0{,}9606$

Ejemplo 3

Una compañía de autobuses proclama que el 95% de sus unidades llega a tiempo. Si un hombre viaja en tres de estos buses ¿Cuál es la probabilidad (asumiendo la proclamación como verdadera) de que:

- Las tres veces llegue a tiempo
- Uno de los buses se retarde

Solución:

X = Nº de autobuses que llega a tiempo $X \sim bi(x, n, p)$

n =3
x =3
p =0,95
q =0,05

Por fórmula:

$$P(X=3) = \binom{3}{3}(0{,}95)^3(0{,}05)^{3-3}$$

$$P(X=3) = 0{,}8574$$

Por cambio de variable y tabla:

Y = Nº de autobuses que se retardan. p =0,05 y n =3

X	Y
0	3
1	2
2	1
3	0

$$P(X=3) = P(Y=0) = F(0) = 0{,}8574$$

n =3, y =1, p =0,05

$$P(X=2)=P(Y=1)=F(1)-F(0)$$

Por tabla: $$P(Y=1)=0{,}9928-0{,}8574$$

$$P(Y=1)=0{,}1354$$

Ejemplo 4

Si es cierto que el 80% de todos los accidentes industriales se pueden evitar poniendo estricta atención a regulaciones de seguridad, determine la probabilidad de que cinco de siete accidentes industriales se puedan prevenir:

Al utilizar la fórmula de distribución binomial.
Por tabla.

Solución:

X = Nº de accidentes evitados $X \sim bi(x,n,p)$

n =7
x =5
p =0,80
q =0,20

$$P(X=5)=\binom{7}{5}(0{,}80)^5(0{,}20)^{7-5}$$

$$P(X=5)=0{,}2753$$

Y = Nº de accidentes no evitados. p =0,20; n =7; x =5

X	Y
0	7
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1
7	0

$$P(X=5)=P(Y=2)=F(2)-F(1)=0{,}8520-0{,}5720=0{,}2753$$

Ejemplo 5

Al revisar las líneas de ensamblaje de una fábrica se observó que 1 de las10 líneas producía artículos defectuosos. Si se toma una muestra al azar de 10 artículos ¿Qué probabilidad hay de que presente la siguiente cantidad de productos defectuosos?

- Ninguno

- Uno
- No más de dos
- Más de uno

Solución:

X = N° de artículos defectuosos $X \sim bi(x, n, p)$ n =10 p =0,10

Por tabla:

$$P(X = 0) = F(0) = 0{,}3487$$

$$P(X = 1) = F(1) - F(0) = 0{,}7361 - 0{,}3487 = 0{,}3874$$

$$P(X \leq 2) = F(2) = 0{,}9298$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0{,}7361 = 0{,}2639$$

Ejemplo 6

Se supone que un producto tiene 5% de elementos defectuosos. Si se toma una muestra de 10 artículos y se observa que hay 2 defectuosos. ¿Es justificable sospechar que la remesa no cumple con las especificaciones?

Solución:

X = N° de elementos defectuosos $X \sim bi(x, n, p)$

n =10
p =0,05
x =2

Por tabla:

$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0{,}9885 - 0{,}9139 = 0{,}0746$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Un evento aislado que ocurre un número específico de veces en un intervalo de tiempo (o espacio) dado es una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson. Un rasgo característico de esta distribución es el hecho de que solo la ocurrencia del evento puede ser cuantificada, no así su no-ocurrencia., la cantidad de vehículos que transitan por una autopista, el número de llamadas telefónicas en una central, entre otras.

Si X ~ Poisson (μ, r); donde μ es la frecuencia media de ocurrencia del evento y r es el

$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \qquad \text{Ecuación 38}$$

x = 0, 1, 2,..., n

e = 2,71828

número de ocurrencias cuya probabilidad se desea conocer. Entonces:

Las Tablas de los valores de la distribución acumulativa de Poisson, se encuentran en el Anexo 2, Tabla B.

Ejemplo 1

Si una empresa tiene una frecuencia media de seis accidentes no fatales en sus empleados al año. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cuatro accidentes no fatales en sus empleados en un año dado?

Solución:

X = Nº de accidentes no fatales en sus empleados, X se distribuye Poisson. $\lambda=6$

Por fórmula: $P(X=4)=\dfrac{e^{-6}6^4}{4!}=0{,}1339$

Por tabla: $P(X=4)=F(4)-F(3)=0{,}2851-0{,}1512=0{,}1339$ Anexo 2, Tabla b

Ejemplo 2

El número de quejas que recibe un ingeniero de control de calidad de sus jefes es una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson con λ = 3,3 al mes, ¿Cuál es la probabilidad de que reciba tan sólo dos quejas en un mes dado?

Solución:

X = Nº de quejas por día, X se distribuye Poisson λ =3,3

Por fórmula: $P(X=2)=\dfrac{e^{-3,3}(3{,}3)^2}{2!}=0{,}2008$

Por tabla: $P(X=2)=F(2)-F(1)=0{,}3594-0{,}1586=0{,}2008$

Ejemplo 3

En una empresa textil, en la inspección de una tela producida en rollos continuos, el número de imperfecciones detectados por un inspector en un período de cinco minutos es una variable aleatoria que tiene la distribución de Poisson con μ = 2,8. ¿Cuáles son las probabilidades de que durante un período de cinco minutos un inspector detecte:

- Una imperfección?
- Dos imperfecciones?

Solución:

X = Nº de imperfecciones en 5 minutos, X tiene distribución de Poisson con μ =2,8.

Por tabla:
P (X=1) = F(1) - F(0) = 0,0608 = 0,1703
P(X=2) = F(2) - F(1) = 0,4595 - 0,2311= 0,2384

Ejemplo 4

El número de lesiones menores que se puede esperar presente un operador de una máquina sin capacitación previa es una variable aleatoria que tiene distribución de Poisson con $\lambda = 4{,}4$ en una jornada laboral. Calcule la probabilidad de que durante la manipulación de una máquina en una jornada laboral, el operario presente cuando más tres lesiones menores.

<u>**Solución:**</u>

X = N° de lesiones menores por jornada laboral, X tiene distribución de Poisson con

$\lambda = 4{,}4$.

<u>Por tabla:</u>

$$P(X \leq 3) = F(3) = 0{,}3595$$

En caso de resolver mediante la función de distribución de la variable X, se deben calcular las probabilidades: P(X=0), P(X=1), P(X=2), P(X=3) y posteriormente sumarlas.

Ejemplo 5

Suponga que la demanda de bombillos en una tienda obedece a una distribución de Poisson con media de 5 cajas por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en dos días se demanden 20 cajas?

<u>**Solución:**</u>

X = N° de cajas vendidas por día, X tiene distribución de Poisson con $\lambda = 5$.

5 cajas ——— 1 día

λ ——— 2 días $\qquad \lambda = 10$

<u>Por tabla:</u>

$$P(X = 20) = F(20) = F(19) = 0{,}9984 - 0{,}9965 = 0{,}0019$$

Ejemplo 6

La demanda de sillas ergonómicas para secretarias es una variable aleatoria con un promedio de cinco por semana para un distribuidor. En una semana dada, ¿cuál es la probabilidad de que ese distribuidor venda dos sillas ergonómicas?

<u>**Solución:**</u>

X = N° de sillas ergonómicas para secretarias vendidos por semana, X tiene distribución de Poisson con $\lambda = 5$.

<u>Por tabla:</u>

$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0{,}1247 - 0{,}0404 = 0{,}0843$$

Ejemplo 7

La Universidad Politécnica Estatal del Carchi (UPEC) presta asesoría técnica y de inversiones o emprendimientos a productores de papa con una capacidad para atender a 8 productores por día. Si los productores llegan aleatoriamente a un promedio de 6 por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado, no se puedan atender a todos los que lleguen ese día buscando asesoría?

Solución:

X = N° de productores que llegan por día, X tiene distribución de Poisson con $\lambda = 6$.

Por tabla:

$$P(X > 8) = 1 - F(8) = 1 - 0{,}8472 = 0{,}1528$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La siguiente variable aleatoria X tiene una distribución binomial, con n=10 y p=0,40. Calcule las siguientes probabilidades:

   $P(X \geq 6/3 < X < 8)$

   $P(X > 5 \cup 2 < X \leq 7)$

   $P(3 < X < 8)$

   $P(X = 5)$

2. Las líneas telefónicas del sistema de reservación de una aerolínea están ocupadas en un 40% del tiempo. Supóngase que los eventos donde las líneas están ocupadas en llamadas sucesivas son independientes. Suponga que se hacen diez llamadas telefónicas al sistema de reservación.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al llamar exactamente tres veces, las líneas estén ocupadas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos en una de las llamadas, las líneas no estén ocupadas?
- ¿Cuál es el número esperado de llamadas en las que todas las líneas estarán ocupadas?

3. Suponiendo que la probabilidad de que un ingeniero obtenga reconocimiento por parte de su jefe es de 0,51, esto sucede si no ha recibido ninguna llamada de atención. Hallar la probabilidad de que en un equipo formado por seis ingenieros se tenga:

- Por lo menos un ingeniero haya obtenido reconocimiento
- Por lo menos un ingeniero haya obtenido una llamada de atención
- Por lo menos dos ingenieros hayan recibido reconocimientos y por lo menos uno haya recibido una llamada de atención.

4. Para un volumen fijo, el número de máquinas que pueden distribuirse en una de las plantas de una fábrica es una variable aleatoria con distribución de Poisson que se presenta con una frecuencia constante. Si el número promedio para un volumen dado es de nueve máquinas en una fábrica de condiciones normales, determinar la probabilidad de que el número de máquinas en un área de planta se encuentre:

- Por encima del promedio
- A una desviación estándar del promedio o menos
- A dos desviaciones estándar del promedio o más.

5. El número de erratas por página en un manual de normas y procedimientos de una empresa, se supone que sigue una distribución de Poisson. En una muestra de 95 páginas se han observado las siguientes frecuencias:

N° de erratas:	0	1	2	3	4	5
Frecuencia:	40	30	15	7	2	1

- Hallar la probabilidad de que en una página tomada al azar haya alguna errata.

6. La probabilidad de que un ingeniero tenga una reacción alérgica al manipular un químico durante un proceso específico es 0,001. Hallar la probabilidad de que, entre 2000 ingenieros, tengan reacción alérgica:

- Exactamente tres
- Más de dos
- Si se sabe que menos de cuatro ingenieros tienen reacción alérgica, ¿Cuál es la probabilidad de que más de dos se vean afectados?
- Calcular E(X) y V(X).

7. Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro y si P(x=0)=0,2. Calcular P(x>2).

8. Un producto electrónico contiene 20 circuitos integrados. La probabilidad de que cualquiera de los circuitos integrados esté defectuoso es 0,01, y los circuitos integrados son independientes. El producto solamente funciona si no hay circuitos integrados defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto funcione?

9. Sea que X denote el número de bits recibidos con error en un canal de comunicación digital, y suponga que X es una variable aleatoria binomial con p=0,001. Si se transmiten 1000 bits, determine lo siguiente:

- $P(x = 1)$
- $P(x \geq 1)$
- $P(x \leq 2 \cup 5 < x < 8 / x > 1)$
- La media y la varianza de X.

10. Cada hora se seleccionan muestras de 20 piezas de un proceso de punzón metálico. De manera típica, 1% de las piezas requieren reprocesamiento. X denota el número de piezas en la muestra de 20 que requieren reprocesamiento. Se sospecha un problema en el proceso, si X excede su media por más de tres desviaciones estándar.

- Si el porcentaje de piezas que es necesario reprocesar se mantiene en 1%, ¿Cuál es la probabilidad de que X exceda su media por más de tres desviaciones estándar?
- Si el porcentaje de reprocesamiento aumenta a 4%, ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de una pieza que requiera reprocesamiento?

11. En un proceso de manufactura tienen que surtirse los pedidos de 100 clientes. En cada pedido se necesita una parte componente que se compra a un proveedor. Sin embargo, de manera típica, 0,2% de los componentes del proveedor se identifican como defectuosos, y puede suponerse que los componentes son independientes.

- Si el fabricante tiene 100 componentes en existencia, ¿Cuál es la probabilidad de que puedan surtirse los 100 pedidos sin reordenar componentes?
- Si el fabricante tiene 102 componentes en existencia, ¿Cuál es la probabilidad de que puedan surtirse los 100 pedidos sin reordenar componentes?
- Si el fabricante tiene 105 componentes en existencia, ¿Cuál es la probabilidad de que puedan surtirse los 100 pedidos sin reordenar componentes?

12. Un semáforo particularmente tardado en el trayecto matutino del lector está en verde 20% de las veces que usted pasa por ese cruce. Suponga que cada mañana representa un ensayo independiente.

- En 5 mañanas, ¿Cuál es la probabilidad de que la luz esté en verde exactamente un día?
- En 20 mañanas, ¿Cuál es la probabilidad de que la luz esté en verde exactamente 4 días?
- En 20 mañanas, ¿Cuál es la probabilidad de que la luz esté en verde más de 4 días o entre 5 y 10 días ambos inclusive?

13. Se supone que el número de imperfecciones en los rollos de tela de una fábrica textil tiene una distribución de Poisson con una media de 0,1 imperfecciones m^2.

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos imperfecciones en 1 m^2 de tela?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos imperfecciones en 10 m^2 de tela?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no haya imperfecciones en 20 m^2de tela?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos dos imperfecciones en 10 m^2 de tela?

14. El número de fallas de un instrumento de prueba de partículas de contaminación tiene una media de 0,02 fallas por hora.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el instrumento no falle en una corrida de 8 horas?
- ¿Cuál es la probabilidad de al menos una falla en 24 horas?

15. El número de imperfecciones superficiales en los tableros de plástico utilizados en el interior de automóviles tiene una media de 0,05 imperfecciones por pie cuadrado de tablero de plástico. Suponga que el interior de un automóvil contiene 10 pies cuadrados de tablero de plástico. Si se venden 10 unidades a una compañía de renta,

- ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los 10 autos tenga alguna imperfección superficial?
- ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo uno de los 10 autos tenga alguna imperfección superficial?

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1 de los propuestos

n= 10 p=0,40

$$P(X \geq 6/3 < X < 8) = \frac{P(X \geq 6 \cap 3 < X < 8)}{P(3 < X < 8)} = \frac{P(6 \leq X < 8)}{P(3 < X < 8)} = \frac{F(7) - F(5)}{\mathrm{F}(7) - \mathrm{F}(3)}$$
$$= \frac{0{,}9877 - 0{,}8338}{0{,}9877 - 0{,}3823} = 0{,}2542$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 5 \cup \mathrm{P}(2 < \mathrm{X} \leq 7) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > 5) + \mathrm{P}(2 < \mathrm{X} \leq 7) - \mathrm{P}(5 < \mathrm{X} \leq 7)$$
$$= 1 - \mathrm{F}(5) + \mathrm{F}(7) - \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(7) + \mathrm{F}(5)$$
$$= 1 - \mathrm{F}(2) = 1 - 0{,}1673 = 0{,}8327$$

$$P(3 < X < 8) = F(7) - \mathrm{F}(3) = 0{,}9877 - 0{,}3823 = 0{,}6054$$

$$P(X = 5) = F(5) - \mathrm{F}(4) = 0{,}8338 - 0{,}6331 = 0{,}2007$$

Ejercicio 6 de los propuestos

n= 2000 p= 0,001 X={Nº ing. con reacción alérgica}

n $\longrightarrow \infty$ y p $\longrightarrow 0 \Longrightarrow$ Binomial aprox Poisson λ = n.p= 2

$$P(X = 3) = F(3) - \mathrm{F}(2) = 0{,}8571 - 0{,}6767 = 0{,}1804$$

$$P(X > 2) = 1 - \mathrm{F}(2) = 1 - 0{,}6767 = 0{,}3233$$

$$P(X > 2/X < 4) = \frac{P(X > 2 \cap X < 4)}{P(X < 4)} = \frac{P(2 < X < 4)}{P(X < 4)}$$
$$= \frac{F(3) - \mathrm{F}(2)}{F(3)} = \frac{0{,}8571 - 0{,}6767}{0{,}8571} = 0{,}2105$$

E(X)=V(X)=λ=2

Ejercicio 7 de los propuestos

X ~ Poisson

$$P(X = 0) = 0{,}2 \Rightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!} = 0{,}2 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0{,}2 \Rightarrow -\lambda = \mathrm{Ln}(0{,}2) \Rightarrow \lambda \approx 1{,}6$$
$$P(X > 2) = 1 - \mathrm{F}(2) = 1 - 0{,}7834 = 0{,}2166$$

Ejercicio 8 de los propuestos

n= 20 p=0,01 X={Nº circuitos defectuosos)

$$P(X=0)=0{,}8179$$

Ejercicio 14 de los propuestos

0,02 ________ 1 h

λ ________ 8 h

X= {Nº fallas/ 8 h}

λ = 0,16

$$P(X=0)=(\frac{e^{-0,16}\,0{,}16^{0}}{0!})=0{,}8521$$

0,02 ________ 1 h

λ ________ 24 h

λ = 0,48

$$P(X\geq 1)=1-F(0)=1-(\frac{e^{-0,48}\,0{,}48^{0}}{0!})=0{,}3812$$

Autoevaluación 4

1. Suponga que la probabilidad de tener una unidad en perfecto estado en una línea de ensamblaje es de 0,90. Si el número de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes, cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 20 unidades:

- Dos se encuentren defectuosas
- Tres como límite se encuentren defectuosas
- Por lo menos 15 se encuentren en perfecto estado
- ¿Cuál es el promedio de unidades defectuosas que se pueden encontrar en esta muestra?
- Calcule la $V(x)$
- Si X=n° de unidades defectuosas, calcule:
  - $P(x>3/0\leq x\leq 5)$
  - $P(x<4 / x<1)$

2. El número de fallas de un instrumento de pruebas debido a las partículas contaminantes de un producto, es una variable aleatoria discreta con una media de 0,02 fallas por hora:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el instrumento no falle en una jornada de ocho horas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se presente al menos una falla en un período de 24 horas?

3. Una compañía de seguros con 10.000 asegurados halla que el 0,005% de la población fallece cada año de un cierto tipo de accidente:

- Hallar la probabilidad de que la compañía tenga que pagar a más de tres asegurados, por un accidente, en un año determinado
- ¿Cuál es el número medio de accidentes por año?

4. Se verifica si los lotes que constan de 15 resortes en espiral de un proceso de producción cumplen con los requerimientos del cliente. El número promedio de resortes en espiral de un lote que no cumplen con los requerimientos es 5. Suponga que el número de muelles que no cumplen en un lote, denotado como X, es una variable aleatoria binomial.

- ¿Cuál es el valor de p?
- ¿Cuál es $P(x\leq 2)$?
- ¿Cuál es $P(X\leq 14)$?

5.Suponga que el número de clientes que entran a un banco en una hora es una variable aleatoria de Poisson y suponga $P(X = 0) = 0,05$. Determinar la media y la varianza de X.

CAPÍTULO 5

Variables aleatorias continuas con aplicaciones en ingeniería eléctrica y mecánica

Relacionado con los ODS 9 "Industria, innovación e infraestructura." Con este ODS se pretende aumentar la investigación científica y mejorar la capacidad tecnológica de los sectores industriales de todos los países.

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Una importante distribución teórica para variables aleatorias continuas es la distribución Normal o de Gauss. La distribución normal es una curva con forma de campana, con eje de simetría en el punto correspondiente al promedio del universo μ. La distancia entre el eje de simetría de la campana y el punto de inflexión de la curva es σ, la desviación estándar poblacional.

¿Para qué se usa la distribución normal?

Para variables continuas tales como estaturas, pesos y longitudes en las áreas biológicas, las cuales usualmente tienen la configuración de una curva normal.

Para variables no normales que pueden fácilmente transformarse a normales.

A pesar de que la distribución de cierta población pueda ser diferente de la normal, las medias de las muestras tienden a ajustarse a una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es grande.

Propiedades de la distribución normal.

Tiene como parámetro a "μ" y "σ^2"; esto es; N (μ,σ^2)

La curva de la distribución normal es asintótica, es decir, las colas de las curvas nunca llegan a tocar el eje de las abscisas.

La distribución normal es simétrica con respecto a la ordenada máxima, siendo por lo tanto las medidas de tendencia central iguales entre sí, es decir, media = mediana = moda.

Si X está normalmente distribuida, Z estará normalmente distribuida.

DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua que tenga distribución normal está dada por la ecuación 39 y se denota $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, lo cual se interpreta como que la variable aleatoria X tiene una distribución normal con media poblacional μ y varianza σ^2.

DISTRIBUCIÓN NORMAL

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS $\Rightarrow$ - Peso, Altura, Tiempo transcurrido en un proceso.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$ Ecuación 39

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

El área total debajo de la curva es igual a 1. El área debajo de la curva comprendida entre μ-σ y μ+σ es aproximadamente 68% del área total; entre μ-2σ y μ+2σ es aproximadamente 95% del área total y entre μ-3σ y μ+3σ es aproximadamente 99% del área total.

La distribución normal estándar o tipicada (ecuación 40), lo que hace es un cambio de variable por el cual se mueve la campana de Gauss, centrándola en el cero del eje X. En ella hay un solo parámetro Z, que incluye al promedio y la desviación estándar de la población. Esta función está tabulada. El cambio de variable hace que se conserve la forma de la función y que sirva para cualquier población, siempre y cuando esa población tenga distribución normal.

DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS $\Rightarrow$

- Transformación de la distribución normal.

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$ Ecuación 40

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

Valores de Z = Tabla

APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL A LA NORMAL

Se aproxima la distribución binomial a la distribución normal para valores de n grandes y p cercano a 0,5. Esto es, cuando una variable aleatoria es discreta con distribución binomial, X~B(n, p) se puede aproximar mediante una distribución normal si n es suficientemente grande y p no está ni muy próximo a 0 ni a 1. Como el valor esperado y la varianza de X son np y npq respectivamente, la aproximación consiste en decir que X~N(np, npq). El convenio que se suele utilizar para poder realizar esta aproximación es:

np>5 cuando p ≤ 0,5 ó
nq>5 cuando p >0,5.

Ejemplo 1

Usando la tabla C del anexo 2, calcular la probabilidad de

P (-1< Z < 1)

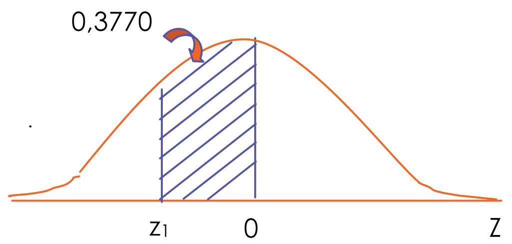
P (-1< Z < 1) = P(Z<1) – P(Z<-1) = F(1) – F(-1) = 0,8413 – 0,1587 = 0,6826

P (Z>3) = 1 – P(Z<3) = 1 – F(3) =1 – 0,9987 = 0,0013

P (Z<2,3) = F(2,3) =0,9893

Determinar el valor o los valores de Z en cada uno de los siguientes casos, donde el área dada se refiere a una curva normal.

El área entre 0 y Z es 0,3770.



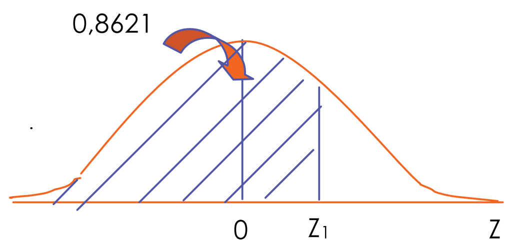
$$P(z_1 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < z_1) = F(0) - F(z_1) = 0,3770$$

$$P(z_1 < Z < 0) = 0,5 - F(z_1) = 0,3770$$

$$\Rightarrow \quad F(z_1) = 0,5 - 0,3770 = 0,1230 \quad \overset{TABLA}{\Rightarrow} \quad z_1 = -1,16$$

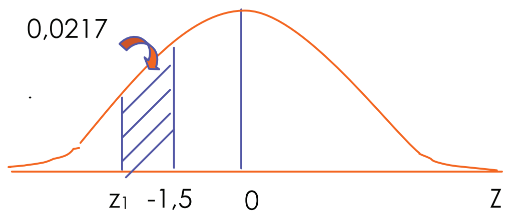
Como la distribución es simétrica el área entre Z=0 y Z=1,16 es también 0,3770.

El área a la izquierda de Z es 0,8621.



$$P(Z < z_1) = F(z_1) = 0,8621 \quad \overset{TABLA}{\Rightarrow} \quad z_1 = 1,09$$

Si el área a la izquierda de Z= –1,5 es 0,0217, determine el valor de Z_1.



$$P(z_1 < Z < -1.5) = P(Z < -1.5) - P(Z < z_1) = F(-1.5) - F(z_1) = 0,0217$$

$$P(z_1 < Z < -1.5) = 0,0668 - F(z_1) = 0,0217$$

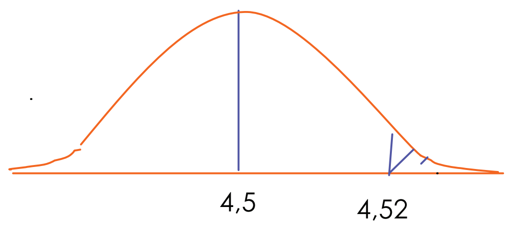
$$\Rightarrow \quad F(z_1) = 0,0668 - 0,0217 = 0,0451 \quad \overset{TABLA}{\Rightarrow} \quad z_1 = -1,69$$

Los valores utilizados para Z se encuentran en el anexo 2, Tabla C.

Ejemplo 2

El diámetro interno de un aro de pistón está distribuido de manera normal con una media de 4,50 cm y una desviación estándar de 0,005 cm ¿Qué probabilidad hay de obtener un diámetro que exceda de 4,52 cm?

<u>**Solución:**</u>



$$X \sim N\left(4,5;(0,005)^2\right)$$

$$P(X > 4,52) = P\left(Z > \frac{4,52 - 4,5}{0,005}\right)$$

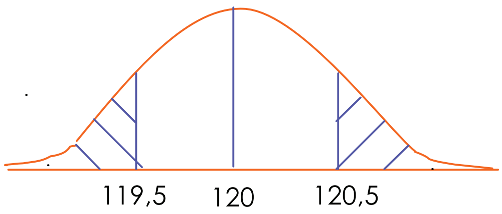
$$= P(Z > 4) = 1 - F(4)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

Ejemplo 3

La resistencia de un medidor de deformación está distribuida normalmente con una media de 120 ohm y una desviación estándar de 0,4 ohm. Los límites de especificación son 120 $\pm$ 0,5 ohm. ¿Qué porcentaje de medidas estará defectuoso?

<u>Solución:</u>



$$X \sim N\left(120;(0,4)^2\right)$$

$$(X<119,5)\cup(X>120,5)=P(X<119,5)+P(X>120,5)$$

$$=P\left(Z<\frac{119,5-120}{0,4}\right)+P\left(Z>\frac{120,5-120}{0,4}\right)$$

$$=P(Z<-1,25)+P(Z>1,25)$$

$$=F(-1,25)+1-F(1,25)$$

$$=0,1056+1-0,8944=0,2112$$

El 21,12% de las medidas estará defectuoso.

Ejemplo 4

La cantidad real de café instantáneo que una máquina vierte en frascos de "4 onzas" puede considerarse como una variable aleatoria con distribución normal que tiene $\sigma=0{,}04$ onzas. Si solo el 2% de los frascos contiene menos de 4 onzas, ¿Cuál es la media de los frascos que se han llenado? Si la variabilidad de la máquina vertidora se reduce a $\sigma=0{,}025$ onzas, compruebe que esto baja la cantidad requerida promedio de café a 4,05 onzas, aunque mantiene el 98% de los frascos por encima de las 4 onzas.

Solución:

$$X \sim N\left(\mu;0{,}04^2\right)$$

$$\sigma = 0{,}04;\ \ \mu = ?$$

$$P(X < 4) = 0{,}02 \quad \overset{TABLA}{\Rightarrow} \quad z_1 = -2{,}05$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow -2{,}05 = \frac{4-\mu}{0{,}04} \quad \Rightarrow (-2{,}05 * 0{,}04) = 4-\mu$$

-0,082 =4 - μ

-0,082-4= - μ

μ=4,08

Por otro lado:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 4) = 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} < 4) = 0{,}02 \quad \overset{\mathrm{TABLA}}{\Rightarrow} \quad \mathrm{z}_1 = -2{,}05$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{x}-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow -2{,}05 = \frac{4-\mu}{0{,}025} \quad \Rightarrow (-2{,}05 * 0{,}0025) = 4-\mu$$

$$-0{,}05 = 4-\mu$$

$$-0{,}05-4 = -\mu$$

$$\Rightarrow \mu = 4{,}05$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar el valor o los valores de Z en cada uno de los siguientes casos, donde el área dada se refiere a una curva normal:

- El área entre 0 y Z es 0,3770
- El área a la izquierda de Z es 0,8621
- El área entre –1,5 y Z es 0,0217 (dos casos)

2. La resistencia de un medidor de deformación está distribuida normalmente con una media de 120 ohm y una desviación estándar de 0,4 ohm. Los límites de especificación son 120±0,5 ohm. ¿Qué porcentaje de medidas estará defectuoso?

3. La capacidad de un tanque de gasolina de una motocicleta es 4 galones y esto puede considerarse como una variable aleatoria con distribución normal que tiene una desviación estándar de 0,05 galones. Si sólo el 3% de los tanques contiene menos de 4 galones, ¿Cuál es la capacidad media de los tanques de gasolina de una motocicleta?

4. En cierto proceso de fabricación se producen discos, cuya masa está normalmente distribuida con una desviación estándar de 5 g ¿Cuál sería la masa media si la probabilidad de obtener una masa superior a 210 g ha de ser 0,01?

5. Ciertas lámparas eléctricas que fueron compradas para alumbrar una pista tienen una vida media de 3000 horas con un coeficiente de variación de 11,3%. Si es más económico cambiar todas las lámparas cuando el 20% de ellas se han fundido, que cambiarlas según se vayan necesitando, ¿después de cuántas horas se deben reemplazar? Suponga que no se han cambiado las lámparas. Calcule el lapso después del cual se habrán fundido otro 20% de ellas.

6. El peso medio de 500 estudiantes varones de cierta universidad es de 75 kg, y la desviación típica es 7 kg. Suponga que los pesos estén normalmente distribuidos, hallar cuántos estudiantes pesan:

- entre 60 y 77 kg.
- más de 90 kg.

7. Las puntuaciones en un examen de estadística eran de 0, 1, 2,..., 20 puntos, según el número de respuestas correctas de entre 20 preguntas. La nota media fue de 13 puntos y la desviación típica 3. Supuesto que las notas estuvieran normalmente distribuidas, determinar:

- el porcentaje de estudiantes que tuvo más de 12 puntos
- la nota máxima del primer cuartil
- la nota mínima del cuartil superior

8. Cierta variable X sigue una distribución normal, calcular los parámetros de la distribución si se sabe que: $P(1073<X<2345)=98,4\%$ y $P(X>2345)=0,1\%$

9. Sea X una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media 12 y desviación estándar 3, se desea calcular la probabilidad de que esa variable aleatoria:

a. Difiera de la media en más de una vez la desviación estándar
b. Difiera de la media en menos de una vez la desviación estándar
c. Sea superior a la media en menos de 2 unidades
d. Sea inferior a la media en más de dos veces la desviación estándar

10. Suponga que las mediciones de la corriente en una tira de alambre siguen una distribución normal con una media de 10 miliamperes y una varianza de 4 miliamperes^2. ¿Cuál es la probabilidad de que:

- Una medición exceda los 13 miliamperes?
- Una medición de la corriente esté entre 9 y 11 miliamperes?
- Determine cuál es el valor donde la probabilidad de que una medición de la corriente esté debajo de este valor sea 0,98.

11. El diámetro de un eje en un propulsor de almacenamiento óptico, tiene una distribución normal con una media de 0,2508 pulgadas y una desviación estándar de 0,0005 pulgadas. Las especificaciones de los ejes son 0,2500$\pm$0,0015 pulgadas. ¿Qué proporción de los ejes cumple con las especificaciones?

12. La resistencia a la compresión de muestras de cemento puede modelarse mediante una distribución normal con una media de 6000 kg/cm^2 y una desviación estándar de 100 kg/cm^2.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia a la compresión de una muestra sea menor que 6250 kg/cm^2?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia a la compresión de una muestra esté entre 5800 y 5900 kg/cm^2?
- ¿Cuál es la resistencia a la compresión que excede 95% de las muestras?
- La resistencia a la tensión del papel se modela mediante una distribución normal con una media de 35 lb/pulg^2 y una desviación estándar de 2 lb/pulg^2.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia a la tensión de una muestra sea menor que 40 lb/pulg^2?
- Si las especificaciones requieren que la resistencia a la tensión exceda 30 lb/pulg^2, ¿Qué proporción de las muestras se desecha?

13. La medición del diámetro interno de un tubo de medición está normalmente distribuida con una media de 5,01 cm y una desviación estándar de 0,03 cm. Los límites de especificación son 5$\pm$0,05 ¿Qué porcentaje de los tubos es inaceptable?

14. La media de la operación de llenado de latas de cola puede ajustarse con facilidad, pero la desviación estándar se mantiene en 0,1 onzas.

- ¿En qué valor deberá fijarse la media para que 99,9% de las latas excedan 12 onzas?
- ¿En qué valor deberá fijarse la media para que 99,9% de las latas excedan 12 onzas si la desviación estándar puede reducirse a 0,05 onzas líquidas?

15. El peso de un zapato especializado para correr tiene una distribución normal con una media de 12 onzas y una desviación estándar de 0,5 onzas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un zapato pese más de 13 onzas?
- ¿Cuál debe ser la desviación estándar del peso para que el fabricante anuncie que el 99,9% de sus zapatos pesan menos de 13 onzas?

16. Suponga que X tiene una distribución normal con media 5 y desviación estándar 4. Obtenga el valor de x que resuelve cada una de las siguientes probabilidades

- $P(X>x) = 0,5$
- $P(X>x) = 0,95$
- $P(x<X<9) = 0,2$
- $P(3<X<x) = 0,95$
- $P(-x<X<x) = 0,99$

17. Una fábrica produce pistones cuyos diámetros se encuentran adecuadamente clasificados por una distribución normal con un diámetro promedio de 5 cm y una desviación estándar igual a 0,001 cm. Para que un pistón sirva, su diámetro debe encontrarse entre 4,998 y 5,002 cm. Si el diámetro del pistón es menor que 4,998 se desecha; si es mayor que 5,002 el pistón puede reprocesarse. ¿Qué porcentaje de pistón servirá? ¿Qué porcentaje será desechado? ¿Qué porcentaje será reprocesado?

18. El tiempo necesario para armar cierta unidad es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 30 min y desviación estándar igual a 2 min. Determinar el tiempo de armado de manera tal que la probabilidad de exceder éste sea de 0,02.

19. Una organización gubernamental planea llevar a cabo una encuesta para detectar la preferencia en la población con respecto a la energía eólica o geotérmica (A y B) ya que ambas pueden ser factibles de generar en la zona. Supóngase que toman una muestra aleatoria de mil ciudadanos. ¿Cuál es la probabilidad de que 550 o más ciudadanos indiquen una preferencia por energía eólica si la población, con respecto a estas dos opciones, se encuentra igualmente dividida?

20. La probabilidad de que un supercomputador esté en uso en una hora es 0,45. Hallar la probabilidad de que, de 2000 usuarios, estén en uso:

a. Entre 700 y 900 terminales en uso
b. Menos del 25% de los terminales estén en uso
c. Si se sabe que al menos el 20% de los terminales están en uso, ¿Cuál es la probabilidad de que entre 200 y 800 terminales estén en uso?
d. Calcular E(X) y V(X).

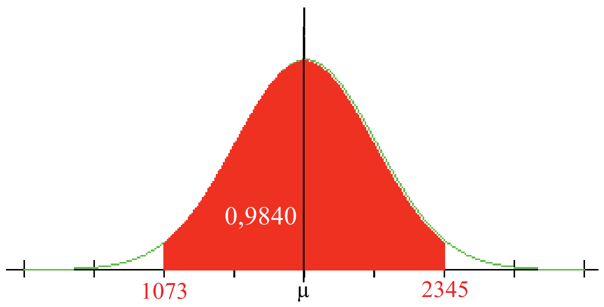
Ejercicio 8 de los propuestos

Cierta variable X sigue una distribución normal, calcular los parámetros de la distribución si se sabe que:

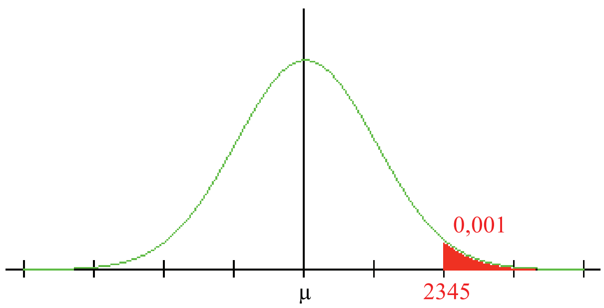
P(1073<X<2345) = 98,4% y P(X>2345)= 0,1%

Solución:

$X \sim N(\mu; \quad \sigma^2)$. Se resuelve a través de un sistema de ecuaciones.



$P(1073 < X < 2345) = 0{,}9840$
$P(X > 2345) = 0{,}001$
$\Rightarrow P(X < 1073) = 1 - 0{,}9840 - 0{,}001 = 0{,}0150$
$Z_{0,0150} = -2{,}17$
Por tabla



$P(X > 2345) = 0{,}001$

$\Rightarrow P(X < 2345) = 1 - 0{,}001 = 0{,}9990$

$Z_{0,9990} = 3{,}09$
Por tabla

$Z_{0,0150} = -2{,}17$

$$Z_{0,0150} = \frac{1073 - \mu}{\sigma} \Rightarrow -2{,}17 = \frac{1073 - \mu}{\sigma} \Rightarrow -2{,}17\sigma = 1073 - \mu \quad (\text{Ecuación} \quad \text{I})$$

$$Z_{0,9990} = \frac{2345 - \mu}{\sigma} \Rightarrow 3{,}09 = \frac{2345 - \mu}{\sigma} \Rightarrow 3{,}09\sigma = 2345 - \mu \quad (\text{Ecuación} \quad \text{II})$$

$$\begin{array}{r} (-1) * -2{,}17\sigma = 1073 - \mu \\ 3{,}09\sigma = 2345 - \mu \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 2{,}17\sigma = -1073 + \mu \\ \underline{3{,}09\sigma = 2345 - \mu} \\ 5{,}26\sigma = 1272 \end{array} \Rightarrow \sigma = \frac{1272}{5{,}26} = 241{,}83$$

$$\Rightarrow \sigma = 241{,}83$$

$$\Rightarrow 3{,}09(241{,}83) = 2345 - \mu \Rightarrow \mu = 2345 - 3{,}09(241{,}83) = 2345 - 747{,}25 = 1597{,}75$$

$$\Rightarrow \mu = 1597{,}75$$

Ejercicio 9 de los propuestos

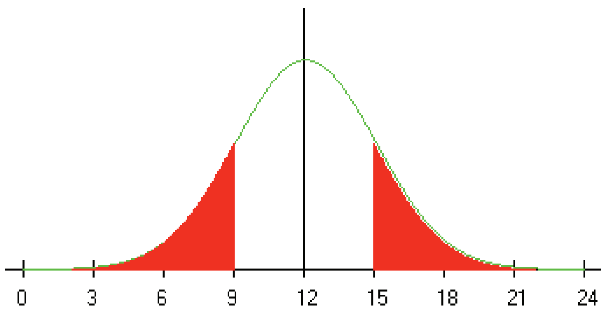
Sea X una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media 12 y desviación estándar 3, se desea calcular ¿Cuál es la probabilidad de que esa variable aleatoria:

a. Difiera de la media en más de una vez la desviación
b. Difiera de la media en menos de una vez la desviación
c. Sea superior a la media en menos de 2 unidades
d. Sea inferior a la media en más de dos veces la desviación

Solución:

Parte a)

Difiera de la media en más de una vez la desviación



$$X \sim N(12;\ 3^2)$$

$$\mu \pm \sigma \Rightarrow 12 \pm 3$$

$$X < 12 - 3 \cup X > 12 + 3$$

$$X < 9 \cup X > 15$$

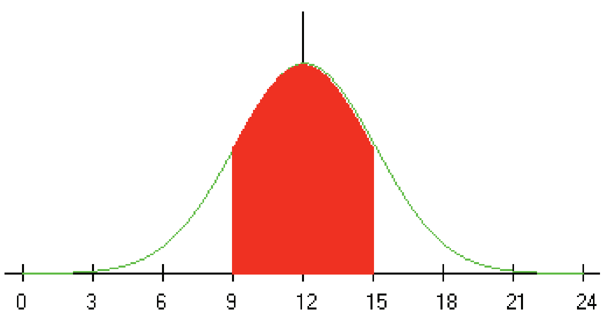
$$P(X < 9 \cup X > 15) = P(X < 9) + P(X > 15) = P\left(Z < \frac{9-12}{3}\right) + P\left(Z > \frac{15-12}{3}\right)$$

$$= P(Z < -1) + P(Z > 1) = F(-1) + 1 - F(1)$$

$$= 0{,}1587 + 1 - 0{,}8413 = 0{,}3174$$

Parte b)

Difiera de la media en menos de una vez la desviación



$$X \sim N(12;\ 3^2)$$

$$\mu \pm \sigma \Rightarrow 12 \pm 3$$

$$12 + 3 < X < 12 - 3$$

$$15 < X < 9$$

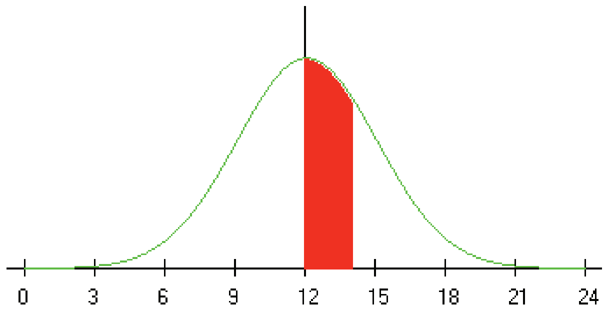
$$P(15 < X < 9) = P(X < 15) - P(X < 9) = P\left(Z < \frac{15-12}{3}\right) - P\left(Z < \frac{9-12}{3}\right)$$

$$= P(Z < 1) - P(Z < -1) = F(1) - F(-1)$$

$$= 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$$

Parte c)

Sea superior a la media en menos de 2 unidades



$$X \sim N(12;\ 3^2)$$

$$\mu + 2 \Rightarrow 12 + 2$$

$$12 < X < 12 + 2$$

$$12 < X < 14$$

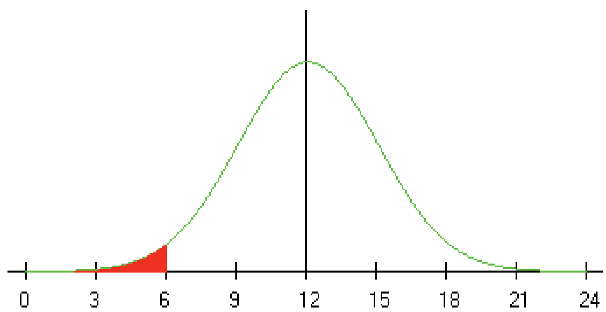
$$P(12 < X < 14) = P(X < 14) - P(X < 12) = P\left(Z < \frac{14-12}{3}\right) - P\left(Z < \frac{12-12}{3}\right)$$

$$= P(Z < 0{,}67) - P(Z < 0) = F(0{,}67) - F(0)$$

$$= 0{,}7475 - 0{,}5000 = 0{,}2475$$

Parte d)

Sea inferior a la media en más de dos veces la desviación



$$X \sim N(12;\ 3^2)$$

$$\mu - 2\sigma \Rightarrow 12 - 6$$

$$X < 12 - 6$$

$$X < 6$$

$$P(X < 6) = P\left(Z < \frac{6-12}{3}\right) = P(Z < -2) = F(-2) = 0{,}0228$$

Ejercicio 20 de los propuestos

La probabilidad de que un supercomputador esté en uso en una hora es 0,45. Hallar la probabilidad de que, de 2000 usuarios, estén en uso:

a. Entre 700 y 900 terminales en uso
b. Menos del 25% de los terminales estén en uso
c. Si se sabe que al menos el 20% de los terminales están en uso, ¿Cuál es la probabilidad de que entre 200 y 800 terminales estén en uso?

d. Calcular E(X) y V(X).

Solución:

Se utiliza la aproximación binomial a la distribución normal

$$X = \text{N° de terminales en uso.}$$

$$X \quad Binomial(x; 2000; 0{,}45)$$

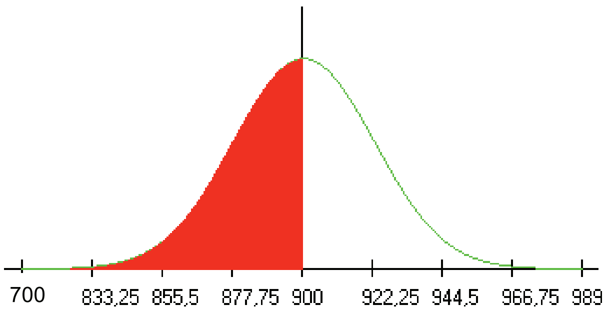
$$n \to \infty$$

$$p \to 0{,}50$$

$$X \quad aprox.Normal(\mu; \sigma^2)$$

$$\mu = n * p = 2000 * 0{,}45 = 900$$

$$\sigma^2 = n * p * (1 - p) = 2000 * 0{,}45 * 0{,}55 = 495$$



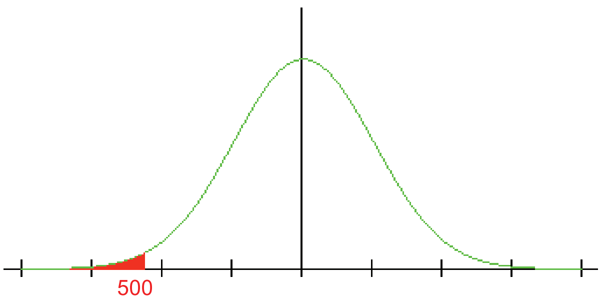
Parte a)
Entre 700 y 900 terminales en uso

$$P(700 < X < 900) = P(X < 900) - P(X < 700) = P\left(Z < \frac{900 - 900}{\sqrt{495}}\right) - P\left(Z < \frac{700 - 900}{\sqrt{495}}\right)$$

$$= P(Z < 0) - P(Z < -8{,}99) = F(0) - F(-8{,}99)$$

$$= 0{,}5000 - 0 = 0{,}5000$$

Parte b) Menos del 25% de los terminales estén en uso



$$2000 * 0{,}25 = 500$$

$$X < 500$$

$$P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500 - 900}{\sqrt{495}}\right) = P(Z < -17{,}98) = F(-17{,}98) = 0$$

Parte c)

Si se sabe que al menos el 20% de los terminales están en uso, ¿Cuál es la probabilidad de que entre 200 y 800 terminales estén en uso?

$$P(200 < X < 800/X > 400) = \frac{P(200 < X < 800 \cap X > 400)}{P(X > 400)} = \frac{P(400 < X < 800)}{P(X > 400)}$$

$$= \frac{P(X < 800) - P(X < 400)}{P(X > 400)}$$

$$= \frac{P\left(Z < \frac{800 - 900}{\sqrt{495}}\right) - P\left(Z < \frac{400 - 900}{\sqrt{495}}\right)}{P\left(Z > \frac{400 - 900}{\sqrt{495}}\right)}$$

$$= \frac{P(Z < -4{,}49) - P(Z < -22{,}47)}{P(Z > -22{,}47)} = \frac{F(-4{,}49) - F(-22{,}47)}{1 - F(-22{,}47)} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$$

Parte d)

Calcular E(X) y V(X).

$$E(X) = \mu = n * p = 2000 * 0{,}45 = 900$$

$$V(X) = \sigma^2 = n * p * (1 - p) = 2000 * 0{,}45 * 0{,}55 = 495$$

Autoevaluación 5

1. Un profesor de un numeroso grupo de estudiantes de ingeniería los califica de la siguiente manera:

- Si la calificación es mayor que μ +1,6σ la calificación es A
- Si μ + 0,4σ≤puntuación≤ μ +1,6σ la calificación es B
- Si μ - 0,4σ≤puntuación≤ μ +0,4σ la calificación es C
- Si μ - 0,4σ≤puntuación≤ μ +0,4σ la calificación es C
- Si μ -1,6σ ≤puntuación≤ μ - 0,4σ la calificación es D
- Si la calificación es menor que μ - 1,6σ la calificación es E
- Suponiendo que estas calificaciones están distribuidas de manera normal con una media μ y una desviación estándar σ (válida ya que sus alumnos son numerosos) ¿Cuál es el porcentaje de cada calificación otorgada por el profesor?

2. En una empresa destinada a la producción de envases se registró que éstos presentaban un peso promedio de 10 g con una desviación de 4 g. Si se asume que la variable peso se distribuye normalmente calcule:

- ¿Qué probabilidad existe de seleccionar envases con pesos superiores a 8g?
- ¿Qué porcentaje del total de envases tienen pesos inferiores a 18g?
- ¿Qué porcentaje tienen pesos entre 8g y 16g si se sabe que pesan menos de 12g?
- ¿Cuántos envases pesan entre 4g y 12g si se tienen un total de 400 envases?

3. El volumen de llenado de una máquina automatizada usada para llenar latas de una bebida carbonatada tiene una distribución normal con una media de 12,4 onzas líquidas y una desviación estándar de 0,1 onzas líquidas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un volumen de llenado sea menor que 12 onzas líquidas?

Si se desechan todas las latas con menos de 12,1 onzas o con más de 12,6 onzas,

- ¿Qué proporción de las latas se desecharía?
- Determine las especificaciones simétricas alrededor de la media que incluyan al 99% de las latas.

OPCIONAL

4. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con parámetros μ y σ^2, demuestre que su f(x) es una función de densidad de probabilidad, que su E(x)= μ y su V(x)= σ^2.

CAPÍTULO 6

Estimaciones puntuales y por intervalo con aplicaciones en educación

Relacionado con el ODS 4"Educación de calidad." Este ODS pretende garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje para todos durante toda la vida.

PARÁMETRO

Es cualquier característica de una población que sea medible. Un parámetro es una medida que se calcula para describir una característica de una población completa. Se denota como "θ".

ESTADÍSTICO

Es una medida que se calcula para describir una característica a partir de solo una muestra. Se denota "$\hat{\Theta}$". En la figura 33 se muestran los parámetros μ, σ^2 y ρ y los estadísticos $\bar{x}$, s^2 y $\hat{p}$ respectivos.

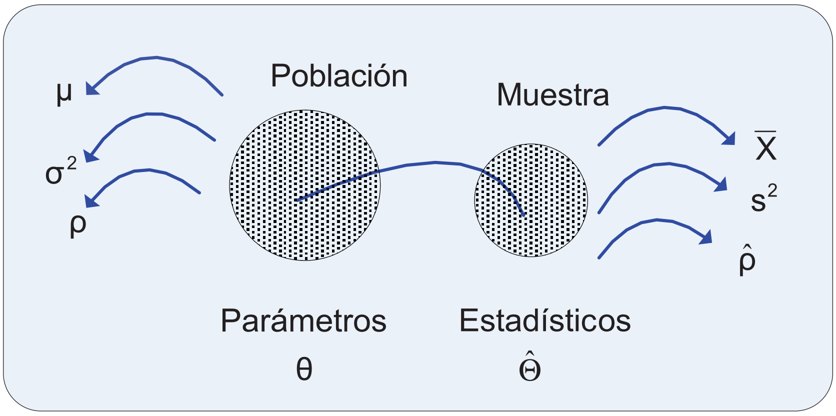


Figura 33. Parámetros y estadísticos para la media, varianza y proporción.

ESTIMACIÓN

Consiste en la búsqueda de uno o varios parámetros de una población entre la que se ha efectuado un muestreo. Por ejemplo, un candidato para un empleo en el sector público desea estimar la proporción real de votantes que lo apoyan mediante la obtención de las opiniones de una muestra aleatoria de n votantes. La fracción de ellos que lo apoyan puede usarse como una estimación de la proporción real de la población total de votantes. Este problema pertenece al área de estimación.

La estimación de un parámetro (θ) involucra el uso de los datos muestrales en conjunción con algún estadístico (T). En un esquema de estimación puntual la población viene representada por su función de distribución $f(x; \theta)$, siendo θ el parámetro poblacional desconocido que tomará valores en el espacio paramétrico Ω la muestra aleatoria de tamaño n, está compuesta por las n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

El estimador del parámetro θ, denotado como T, tendrá su distribución muestral, así pues para diferentes realizaciones de la muestra de tamaño n se tendrán diferentes estimaciones de θ. Pero para una misma muestra aleatoria de tamaño n compuesta por las n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ podemos encontrar diversas funciones $T_1, T_2, \ldots$ que estimen θ.

CARACTERÍSTICAS DESEABLES DE UN ESTIMADOR

Es posible definir muchas estadísticas para estimar un parámetro desconocido θ. Por ejemplo, puede elegirse la Mediana muestral o también la Media muestral para estimar el valor de la media poblacional. Entonces, ¿Cómo seleccionar un buen estimador de θ ? , ¿Cuáles son los criterios para juzgar cuando un estimador de es "bueno" o "malo"?. Si se piensa en términos de estimadores humanos como se encuentran en las grandes instituciones, entonces, quizá un buen estimador es aquella persona cuyas estimaciones siempre se encuentran muy cercanas a la realidad. Las propiedades deseables de un estimador son:

- **Debe ser insesgado:** La distribución muestral de $\hat{\Theta}$ debe tener una media igual al parámetro estimado.
- **Debe ser Eficiente:** la varianza del estimador debe ser la menor posible.
- **Debe ser Suficiente:** utiliza toda la información relevante contenida en la muestra aleatoria, con respecto a , y ningún otro estadístico puede proporcionar más información adicional sobre el parámetro poblacional θ.
- **Debe ser Consistente:** si a medida que se incrementa el tamaño de la muestra de la cual se estimó el parámetro θ, el estadístico T tiende a ser igual al parámetro.

A continuación, se desarrollarán los dos primeros, los cuales se consideran de mayor importancia.

ESTIMADOR INSESGADO

Un estimador debe estar próximo en algún sentido al valor verdadero del parámetro desconocido. Se dice que $\hat{\Theta}$ es un estimador insesgado de θ si el valor esperado de $\hat{\Theta}$ es igual a θ. Esto equivale a afirmar que la media de la distribución de probabilidad de $\hat{\Theta}$ (o la media de la distribución de muestreo de $\hat{\Theta}$) es igual a Θ. Si $E(\hat{\Theta}) = \theta$, entonces el estimador es insesgado. Si el estimador no es insesgado, entonces: $E(\hat{\Theta}) - \theta =$ sesgo. En ocasiones existen varios estimadores insesgados del parámetro (Θ) de la población.

VARIANZA DE UN ESTIMADOR

La varianza de un estimador insesgado es la cantidad más importante para decidir qué tan bueno es el estimador para estimar un parámetro θ. Por ejemplo, sean $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ dos estimadores insesgados del mismo parámetro poblacional. Se dice que $\hat{\Theta}_1$ es un estimador más eficiente de θ que $\hat{\Theta}_2$ si $Var(\hat{\Theta}_1) \leq Var(\hat{\Theta}_2)$. Es muy común utilizar el cociente $Var(\hat{\Theta}_1) / Var(\hat{\Theta}_2)$ para determinar la eficiencia relativa de $\hat{\Theta}_2$ con respecto a $\hat{\Theta}_2$. "Si se consideran todos los estimadores insesgados posibles de θ, **aquel con la varianza más pequeña recibe el nombre de Estimador Eficiente de θ".**

En la figura 34, se observa claramente que solo $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son insesgados, dado que sus distribuciones se centran en θ. El estimador $\hat{\Theta}_1$ tiene varianza más pequeña que $\hat{\Theta}_2$ por tanto es más eficiente. En consecuencia el estimador de θ que se seleccionaría es $\hat{\Theta}_1$.

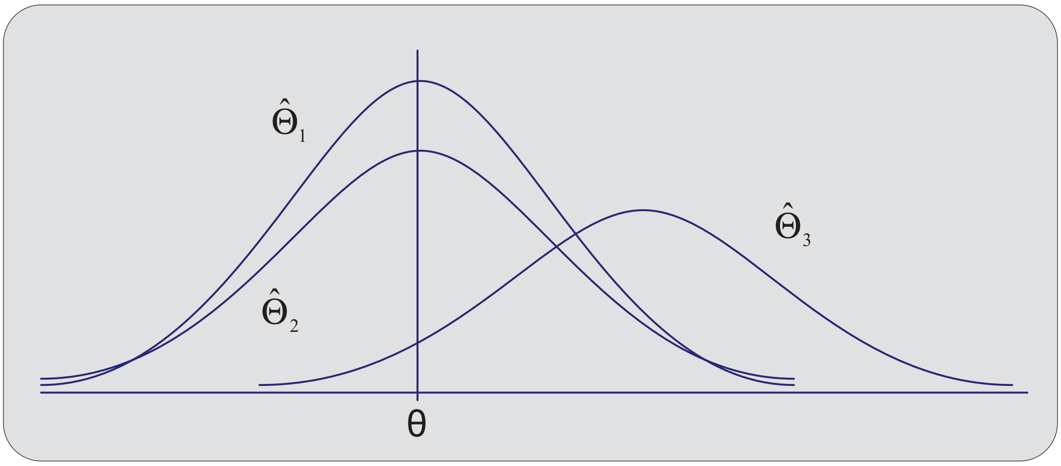


Figura 34. Tres estimadores de θ.

TIPOS DE ESTIMACIÓN

ESTIMACIÓN PUNTUAL

Una estimación puntual de algún parámetro θ de la población es un valor numérico $\hat{\theta}$ que proviene de una muestra de esa población. Los estimadores más frecuentes de algunos parámetros se muestran en la tabla 23.

Tabla 23. Parámetros y estimadores más utilizados

Parámetro	Estimador más probable
μ	$\bar{x}$, la media muestral
σ^2 o σ	s^2 o s, la varianza muestral o desviación estándar muestral
p	$\hat{p}$ = X/n, la proporción muestral, donde X es el número de objetos en una muestra aleatoria de tamaño n que pertenece a la clase de interés
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$, la diferencia de medias muestrales de dos muestras aleatoria independientes
$p_1 - p_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, la diferencia entre las proporciones de dos muestras aleatorias independientes

Por ejemplo, en una clase de estadística el profesor desea saber cuál es la edad promedio de los 45 estudiantes que se encuentran en el aula, para ello, pregunta la edad en forma aleatoria a ocho de ellos obteniendo: 18, 19, 20, 20, 20, 19, 23, 20 años. Posteriormente calcula la media aritmética de esa muestra, arrojando un valor de 19,87 años. Lo cual le induce a pensar que en promedio todos los estudiantes del salón tienen una edad promedio aproximada de 20 años. Esto es una **estimación puntual.**

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

En muchas situaciones, una estimación puntual no proporciona suficiente información sobre un parámetro θ. Por ejemplo, si el profesor de estadística tiene interés en estimar la edad promedio de los 45 estudiantes en el aula de clases, es probable que un solo número no sea tan confiable, como un intervalo dentro del cual se espera encontrar el valor de este parámetro. El intervalo estimado recibe el nombre de **Intervalo de confianza.**

Una estimación por intervalos de un parámetro desconocido θ es un intervalo de la forma $a \leq \theta \leq b$, donde los puntos extremo a y b dependen del valor numérico del estadístico $\hat{\Theta}$ para una muestra en particular y de la distribución de muestreo de $\hat{\Theta}$.

De la distribución de muestreo de $\hat{\Theta}$ es posible determinar los valores de a y b tales que la siguiente proposición sea verdadera:

$P(a \leq \theta \leq b) = 1-\alpha$; $\quad 0 < \alpha < 1$

Por tanto, se tiene una probabilidad de $1-\alpha$ de seleccionar una muestra que produzca un intervalo que contiene el valor verdadero de θ. El intervalo resultante $a \leq \theta \leq b$ se conoce como Intervalo de Confianza del 100 $(1-\alpha)$%. Las cantidades a y b se denominan límites de confianza inferior y superior, respectivamente y $1-\alpha$ es el coeficiente de confianza. De tal forma, cuando $\alpha = 0{,}05$, se tiene un Intervalo de confianza del 95% y cuando $\alpha = 0{,}01$ se tiene uno del 99%. Entre mayor es el intervalo de confianza se tiene más seguridad de que el mismo contenga el parámetro desconocido.

Un intervalo del tipo $a \leq \theta \leq b$, recibe el nombre más apropiado de Intervalo de Confianza Bilateral. También existen intervalos de confianza Unilaterales: $\theta \geq a$ y $\theta \leq b$, donde los límites de confianza se eligen de modo que $P(\theta \geq a) = 1-\alpha$ y $P(\theta \leq b) = 1-\alpha$.

A continuación, se presentan métodos para encontrar intervalos de confianza para Medias, Varianzas y Proporciones:

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN CON VARIANZA CONOCIDA

Si $\overline{X}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño n de una población con varianza conocida σ^2, un intervalo de confianza para la media poblacional desconocida, del $100(1-\alpha)$ por ciento está dado por:

$$\overline{X} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{Ecuación 41}$$

Donde $Z_{\alpha/2}$ es el punto en la distribución normal estándar que corresponde al porcentaje $\alpha/2$. La tabla de valores de Z para distintos niveles de confianza se presenta en la tabla 24 la cual se deriva del anexo 2. Tabla C.

Tabla 24. Tabla de valores Z para distintos niveles de confianza

Nivel de Confianza	$\alpha/2$	$1-\alpha/2$	$Z_{1-\alpha/2}$
0,99	0,005	0,995	2,575
0,98	0,010	0,990	2,330
0,97	0,015	0,985	2,170
0,96	0,020	0,980	2,055
0,95	0,025	0,975	1,960
0,94	0,030	0,970	1,880
0,93	0,035	0,965	1,810
0,92	0,040	0,960	1,750
0,91	0,045	0,955	1,690
0,90	0,050	0,950	1,645

Ejemplo

La duración en minutos del tiempo que le toma a un grupo de 50 estudiantes culminar una prueba de suficiencia en inglés tiene una distribución aproximadamente normal con una media de 115 minutos con una desviación estándar poblacional de $\sigma = 25$ min. Construir un intervalo de confianza del 95% para el tiempo promedio que toma presentar el examen de suficiencia para todos los estudiantes de la universidad.

Datos:

$\bar{X} = 115$ min.

$\sigma = 25$ min

$n = 50$

$1 - \alpha = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$

$Z_{0,975} = 1{,}96$ (obtenido de la tabla 24)

Solución:

$$115 - 1{,}96 * \frac{25}{\sqrt{50}} \leq \mu \leq 115 + 1{,}96 * \frac{25}{\sqrt{50}}$$

$$108{,}07 \leq \mu \leq 121{,}93$$

El tiempo promedio para culminar el examen de suficiencia de inglés por todos los estudiantes de la Universidad se encuentra incluido en el intervalo comprendido entre 108 y 122 minutos y eso se asegura con un 95% de confianza.

Selección del tamaño de muestra:

Si $\overline{X}$ se utiliza como un estimado de μ, se puede tener una confianza del $100(1 - \alpha)\%$ en que el error será menor que una cantidad específica "E", cuando el tamaño de la muestra (n) se aproxime utilizando la ecuación 42.

$$n = \left(\frac{Z_{1-\alpha/2}\,\sigma}{E} \right)^2 \qquad \text{Ecuación 42}$$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS POBLACIONALES CON VARIANZAS CONOCIDAS

Si $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ son las medias de dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de poblaciones con varianzas conocidas σ_1^2 y σ^2_2 respectivamente, entonces un intervalo de confianza del 100(1-α) por ciento para μ_1 - μ_2 (diferencia de medias poblacionales) esta dado por la ecuación 43.

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad \text{Ecuación 43}$$

Donde $Z_{\alpha/2}$ es el punto en la Distribución Normal Estándar que corresponde al porcentaje α/2.

Ejemplo

Se llevó a cabo un experimento donde se compararon los rendimientos de una prueba vocacional a dos tipos de estudiantes, el tipo A (hombres) y el tipo B (mujeres). Se midió el rendimiento en una escala 0 – 50 puntos y se tomó una muestra de 50 hombres y 75 mujeres. El rendimiento promedio en la prueba para los hombres arrojó un valor de 36 puntos y el promedio para las mujeres fue de 42 puntos. Calcule un intervalo de confianza del 96% sobre $\mu_B - \mu_A$, donde μ_B y μ_A corresponden a las medias de la población del rendimiento en la prueba vocacional para todos los hombres y mujeres, respectivamente. Suponga que las desviaciones estándar de la población son 6 y 8 para los grupos A y B.

Datos:

$\bar{x}_A$ = 36 ptos. $\bar{x}_B$ = 42 ptos.

σ_A = 6 ptos. σ_B = 8 ptos.

n_A = 50 n_B = 75

1 – a = 96%, a = 4%

$Z_{0,98}$ = 2,055 (obtenido de la distribución normal estándar)

Solución:

$$42 - 36 - 2{,}055 * \sqrt{\frac{8^2}{75}+\frac{6^2}{50}} \leq \mu_B - \mu_A \leq 42 - 36 + 2{,}055 * \sqrt{\frac{8^2}{75}+\frac{6^2}{50}}$$

$$6 - 2{,}5776 \leq \mu_B - \mu_A \leq 6 + 2{,}5776$$

$$3{,}42 \leq \mu_B - \mu_A \leq 8{,}58$$

La diferencia en los puntajes promedio entre ambos grupos en la prueba vocacional se encuentra entre 3,42 y 8,58 puntos, con un 96% de confianza.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN CON VARIANZA DESCONOCIDA

Si $\overline{X}$ y s son la media y la desviación estándar respectivamente, de una muestra aleatoria de tamaño n de una población con varianza desconocida σ^2, un intervalo de confianza para μ del 100(1-α) por ciento está dado por la ecuación 44.

$$\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad \text{Ecuación 44}$$

Donde $t_{\alpha/2}$ es el punto crítico superior que corresponde al $\alpha/2$ % en la Distribución T con n-1 grados de libertad. Ver la tabla de la distribución t de Student en el Anexo 2. Tabla D.

Ejemplo

A continuación, se presentan las notas obtenidas en la prueba final de Literatura Hispanoamericana por nueve estudiantes de Licenciatura en Artes, de la Universidad del Oriente.

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntaje	6,6	8,7	9,0	3,4	4,2	5,5	8,0	9,0	7,7

Construya un intervalo de confianza del 99% para la nota promedio de todos los estudiantes que presentaron tal prueba final.

Solución:

Primero se calculan la media y desviación estándar muestrales:

$$\overline{X} = \sum_{1}^{9}\frac{X_i}{n} = \frac{6{,}6 + 8{,}7 + 9{,}0 + \ldots + 7{,}7}{9} = 6{,}9\,puntos$$

$$s = \sum_{1}^{9}\frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{(6{,}6 - 6{,}9)^2 + \ldots + (7{,}7 - 6{,}9)^2}{9-1} = 2{,}11\,puntos$$

Por ello;

$\overline{X}$ = 6,9 puntos

s = 2,11 puntos

n = 9

1 – a = 99% , a = 1%

$t_{0,005;8}$ = 3,355 (obtenido de la distribución t de Student en Anexo 2. Tabla D)

$$6{,}9 - 3{,}355 * \frac{2{,}11}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 6{,}9 + 3{,}355 * \frac{2{,}11}{\sqrt{9}}$$

$$4{,}54 \leq \mu \leq 9{,}26$$

La nota promedio en la prueba final de Literatura Hispanoamericana obtenida por todos los estudiantes que presentaron se encuentra incluida entre los valores 4,54 y 9,26 puntos y esto se asegura con un 99% de confianza.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS POBLACIONALES CON VARIANZAS DESCONOCIDAS PERO IGUALES

Si $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ y S_1^2, S^2_2 son las medias y las varianzas de dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de poblaciones con varianzas desconocidas pero iguales σ^2_1 y σ^2_2 respectivamente, entonces un intervalo de confianza del 100(1-α) por ciento para μ_1 - μ_2 esta dado por está dado por la ecuación 45.

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, Sp\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, Sp\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Ecuación 45

Donde Sp se denomina estimador combinado de la desviación estándar común de la población y está dado por la ecuación 46.

$$Sp = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

Ecuación 46

donde v = grados de libertad = n_1+n_2-2

Ejemplo

Se quiere determinar el gasto promedio mensual de profesores universitarios en ciertas regiones ecuatorianas. Para ello, se toman muestras aleatorias de dos zonas geográficas (oriente y occidente) y se les pregunta a los profesores cuánto gastan mensualmente en sus necesidades básicas: comida, transporte y alimentación. La información se presenta en la tabla 25.

Tabla 25

. Gasto promedio mensual de profesores universitarios

Zona	N° profesores encuestados	Gasto promedio	Varianza muestral
Oriente	45	$ 767	533,61
Occidente	32	$ 832	240,25

Construya un intervalo de confianza del 90% para la diferencia en los gastos mensuales promedios de los profesores universitarios en oriente y occidente. Asuma varianzas desconocidas iguales.

<u>Solución:</u>

Se calcula en primer término la desviación estándar combinada usando la ecuación 46:

$$Sp = \sqrt{\frac{(45-1)*533{,}61+(32-1)*240{,}25}{45+32-2}} = \$20{,}31$$

1 – a = 90% , a = 10%

$t_{0,05;75}$ = 1,645 (obtenido de la distribución t de student Anexo 2. Tabla D; con grados de libertad = v = 45+32-2=75 y el intervalo de confianza de 90% es;

$$(832-767)-1{,}645*20{,}31*\sqrt{\frac{1}{45}+\frac{1}{32}} \leq \mu_1-\mu_2 \leq (832-767)+1{,}645*20{,}31*\sqrt{\frac{1}{45}+\frac{1}{32}}$$

$$(832-767)-7{,}7257 \leq \mu_1-\mu_2 \leq (832-767)+7{,}7257$$

$$(57{,}27 \leq \mu_1-\mu_2 \leq 72{,}73)$$

Lo que indica que la diferencia entre los gastos mensuales promedios para los profesores de ambas zonas es un valor que se encuentra incluido en el rango de \$58 a \$73, esto se asegura con un 90% de confianza.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS POBLACIONALES CON VARIANZAS DESCONOCIDAS Y DIFERENTES

Si $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ y S_1^2, S_2^2 son las medias y las varianzas de dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de poblaciones con varianzas desconocidas y diferentes σ^2_1 σ^2_2 respectivamente, entonces un intervalo de confianza del 100(1-α) por ciento para μ_1 - μ_2 esta dado por las ecuaciones 47 y 48 .

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{\alpha/2,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1-\mu_2 \leq \bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{\alpha/2,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \qquad \text{Ecuación 47}$$

Donde “v” son los grados de libertad, y están dados por:

$$v = \frac{\left(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}} \qquad \text{Ecuación 48}$$

Ejemplo

Para el ejercicio anterior, construya ahora un intervalo de confianza para la diferencia de gastos promedios de los profesores de ambas zonas, considerando varianzas poblacionales diferentes y un nivel de significacion del 90%.

Solución:

Se deben calcular los grados de libertad, que en este caso vienen dados por “v”:

$$v = \frac{(533{,}61/45 + 240{,}25/32)^2}{\frac{(533{,}61/45)^2}{45-1} + \frac{(240{,}25/32)^2}{32-1}} = 74{,}8 \approx 75$$

$1 - a = 90\%$, $a = 10\%$

$t_{0,05;75}$ = 1,645 (obtenido de la distribución t de student en el anexo 2. Tabla D)

Se calcula ahora el intervalo correspondiente de acuerdo a la ecuación 47:

$$(832\text{-}767) - 1{,}645 * \sqrt{\frac{533{,}61}{45} + \frac{240{,}25}{32}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (832\text{-}767) + 1{,}645 * \sqrt{\frac{533{,}61}{45} + \frac{240{,}25}{32}}$$

$$(832\text{-}767) - 7{,}2391 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (832\text{-}767) + 7{,}2391$$

$$57{,}76 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 72{,}24$$

Lo que indica que la diferencia en los gastos mensuales promedios para los profesores de ambas zonas es un valor que se encuentra incluido en el rango de 58$ a $72 respectivamente, esto se asegura con un 90% de confianza.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN

Si s^2 es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño n, tomada de una distribución normal con varianza desconocida σ^2, entonces un intervalo de confianza del 100(1-α)% para está dado por la ecuación 49.

$$\frac{(n-1) \times S^2}{X^2_{1-\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) \times S^2}{X^2_{\alpha/2,n-1}}$$

Ecuación 49

Donde $X^2_{\alpha/2}$ y $X^2_{1\text{-}\alpha/2}$ son valores en la distribución Chi-Cuadrado de v = n-1 grados de libertad (Anexo 2. Tabla E).

Ejemplo

Se tienen los pesos de 10 matraces llenos de líquido utilizados en una práctica de laboratorio por un profesor de física, los cuales se distribuyen aproximadamente normal. Se obtuvo una varianza muestral de los pesos de 100 mg^2. Encontrar un intervalo del 95% para la varianza poblacional.

Datos:

$S^2 = 100\ mg^2$

n = 10

$1 - a = 95\%$, $a = 5\%$

$X^2_{0,025;\,9} = 2{,}70$

$X^2_{0,975;\,9} = 19{,}023$ (Obtenidos de la distribución Chi-cuadrado)

Solución:

$$\frac{(10-1)\times 100}{19{,}023} \leq \sigma^2 \leq \frac{(10-1)\times 100}{2{,}70}$$

$$47{,}31 \leq \sigma^2 \leq 333{,}33$$

Un intervalo de confianza para la desviación estándar se obtendría calculando la raíz cuadrada de los límites del intervalo:

$6{,}88 \leq \sigma \leq 18{,}26$

Así, la desviación estándar de los pesos de todos los matraces que contienen líquido en el laboratorio se encuentra incluida en el rango de valores comprendido entre 6,88 mg y 18,26 mg y ello se asegura con un 95% de confianza.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA EL COCIENTE DE DOS VARIANZAS POBLACIONALES

Si S_1^2 S_2^2 son las varianzas de dos muestras aleatorias e independientes de tamaño n1 y n2 respectivamente, tomadas de poblaciones normales, entonces un intervalo de confianza del 100(1-α) por ciento σ^2_1 / σ^2_2 para esta dado por las ecuaciones 50 y 51.

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \qquad \text{Ecuación 50}$$

Donde:

$$f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1} = \frac{1}{f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1}} \qquad \text{Ecuación 51}$$

Se quiere determinar si dos grupos de estudiantes, de ingeniería y de administración, tienen la misma variabilidad en el rendimiento académico obtenido hasta el momento. Se tomaron los rendimientos para muestras aleatorias tomadas en ambos grupos y se obtuvieron los siguientes resultados:

Ingeniería: 34, 36, 39, 31, 33, 26, 45, 34, 39, 38, 37, 36
Administración: 33, 41, 39, 32, 29, 28, 33, 34, 25, 28, 36, 33, 35, 35

Construya un intervalo de confianza del 90% para el cociente de las varianzas poblacionales.

Datos:

S_1^2 = 22,24 (de ingeniería)

S_2^2 = 19,15 (de administración)

1 – a = 90% , a = 10% , con estos datos se obtiene en la tabla de la distribución F de Fisher que se encuentra en el Anexo 2. Tabla F:

$$f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} = f_{0,05,11,13} = 2,6345$$
$$f_{\alpha/2\, n_2-1, n_1-1} = f_{0,05,13,11} = 2,7614$$

Solución:

$$\frac{22,24}{19,15} * \frac{1}{2,6345} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{22,24}{19,15} * 2,7614$$

$$0,44 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 3,21$$

La varianza de los rendimientos académicos para ambos grupos de estudiantes se encuentra entre 0,44 $ptos^2$ y 3,21 $ptos^2$ con un 90% de confianza. Puede inferirse, además, que dado que el valor uno (1) está incluido en el intervalo construido, las varianzas de ambas poblaciones (estudiantes de Ingeniería y Administración) son parecidas, es decir la variabilidad de ambos grupos son iguales.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA PROPORCIÓN DE UNA POBLACIÓN

Si $\hat{\rho}$ es la proporción de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n que pertenece a una clase de interés, entonces un intervalo de confianza del 100(1-α) por ciento para la proporción ρ de la población está dado por la ecuación 52.

$$\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \leq P \leq \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \qquad \text{Ecuación 52}$$

Donde $Z_{\alpha/2}$ es el punto en la distribución normal estándar que corresponde al porcentaje $\alpha/2$.

Ejemplo

En una muestra aleatoria de n = 500 estudiantes que ingresan a la carrera de Ingeniería en la Universidad, se encuentra que 340 son estudiantes foráneos, es decir, de otras ciudades donde se encuentra la institución. Calcule un intervalo de confianza del 92% para la proporción real de estudiantes foráneos que ingresan a la carrera.

Datos:

n = 500 estudiantes

X = 340 estudiantes (foráneos)

1 – a = 92% , a = 8%

$Z_{0,92}$ = 1,75 (obtenido de la distribución normal estándar en el anexo 2. Tabla C)

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{340}{500} = 0,68$$

Solución:

$$0{,}68 - 1{,}75 * \sqrt{\frac{0{,}68\,(1-0{,}68)}{500}} \leq P \leq 0{,}68 + 1{,}75 * \sqrt{\frac{0{,}68\,(1-0{,}68)}{500}}$$

$$0{,}68 - 0{,}03651 \leq P \leq 0{,}68 + 0{,}03651$$

$$0{,}64 \leq P \leq 0{,}72$$

La proporción real de estudiantes foráneos que ingresan a la carrera de ingeniería en la Universidad, se encuentra incluida en el conjunto de valores que están entre 0,64 (64%) y 0,72 (72%), esto se asegura con 92% de confianza.

Selección del tamaño de muestra:

Si $\hat{p}$ se utiliza como un estimador de P, se puede tener una confianza del 100(1 – α)% en que el error será menor que una cantidad específica "E", cuando el tamaño de la muestra se aproxime a la expresión dada en la ecuación 53.

$$n = \frac{Z^2_{1-\alpha/2}}{E^2}\,\hat{p}\,(1-\hat{p}) \qquad \text{Ecuación 53}$$

Para el ejercicio anterior, ¿Qué tan grande debe ser la muestra si se quiere tener un 92% de confianza en que la estimación de P esté dentro de 0,02 del valor verdadero?

Aplicando la ecuación 53, se tiene:

$$n = \frac{1{,}75^2}{0{,}02^2} * 0{,}68 * 0{,}32 = 1666 \text{ estudiantes}$$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA DIFERENCIA DE PROPORCIONES POBLACIONALES

Si $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ son las proporciones de éxitos en dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2 respectivamente, que pertenecen a una clase de interés, entonces un intervalo de confianza del 100(1-α) por ciento para P_1 - P_2 esta dado por la ecuación 54.

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} \leq P_1 - P_2 \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} \qquad \text{Ecuación 54}$$

Donde:

$$\hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1 \qquad \hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2$$

Ejemplo

Se encuestan 10 escuelas de ingeniería del Ecuador. La muestra contiene a 250 ingenieros eléctricos, de los cuales 80 son mujeres; y 175 ingenieros químicos, de los cuales 40 son mujeres. Calcule un intervalo de confianza del 93% para la diferencia entre la proporción de mujeres en estos dos campos de la ingeniería.

Datos:

$n_1 = 250$ ingenieros eléctricos
$x_1 = 80$ mujeres
$n_2 = 175$ ingenieros químicos
$x_2 = 40$ mujeres
$1 - \alpha = 93\%$, $\alpha = 7\%$
$Z_{0,965} = 1,81$ (obtenido de la distribución normal estándar)

Solución:

$$\widehat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{80}{250} = 0,32$$

$$\widehat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{40}{175} = 0,23$$

El intervalo viene dado por;

$$(0,32-0,23) - 1,81\sqrt{\frac{0,32*0,68}{250} + \frac{0,23*0,77}{175}} \le P_1 - P_2 \le (0,32-0,23) + 1,81\sqrt{\frac{0,32*0,68}{250} + \frac{0,23*0,77}{175}}$$

$$(0,32-0,23) - 0,0786 \le P_1 - P_2 \le (0,32-0,23) + 0,0786$$

$$0,0114 \le P_1 - P_2 \le 0,1686$$

La diferencia en las proporciones de mujeres entre las escuelas de Eléctrica y Química, se encuentra incluida en el intervalo comprendido entre 1,14% y 16,86% y esto se asegura con un 93% de confianza.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea X_1, X_2, X_3 y X_4 una muestra aleatoria proveniente de una población, con $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$. De los estimadores para el parámetro μ que a continuación se muestran, seleccione el más adecuado y discuta los criterios en los cuales se basa su selección.

- $T1 = (X_1 + X_2 + X_3)/6 + ½X_4$
- $T2 = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/2$
- $T3 = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$

2. Suponga que X es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Sea X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria de tamaño n de la población presentada por X. Demuestre que la media muestral $\overline{X}$ y la varianza muestral S^2_{n-1} son estimadores insesgados de μ y σ^2, respectivamente.

3. Un dedicado estudiante universitario quiere determinar cuánto tiempo emplea en promedio resolviendo ejercicios de Matemáticas financieras. Para ello, escoge al azar 15 ejercicios parecidos al azar de su libro preferido y los resuelve, obteniendo una media de 8 min y una varianza de 4,5 min^2. Si el tiempo promedio para resolver los ejercicios sigue una distribución aproximadamente normal.

- Construya un intervalo de confianza al 95% para este tiempo promedio.
- Si se conoce que la varianza poblacional es de 7,7 min^2. Construya un intervalo del 95% para el tiempo promedio.
- Compare los resultados y concluya.

4. En las prácticas de laboratorio de un estudiante de ingeniería civil, se analiza la fuerza de compresión del concreto. La fuerza de compresión tiene una distribución aproximadamente normal con una varianza de 1000 psi^2. Una muestra aleatoria de 12 observaciones tiene una media de la fuerza de compresión de 3250 psi.

- Construya un intervalo de confianza del 90% para la media de la fuerza de compresión.
- Construya un intervalo de confianza del 99% para la media de la fuerza de compresión.
- Compare la longitud de este intervalo de confianza con la del intervalo anterior.

5. De 1000 casos de estudiantes que han desertado en la universidad seleccionados al azar, 823 resultaron por problemas familiares.

- Construya un intervalo de confianza de 95% para el índice de casos de desertación universitaria por problemas familiares.
- ¿Cuál sería el tamaño de la muestra necesario para tener una confianza de 95% de que el error al estimar este índice sea menor que 0,03?

6. Un estudiante del último semestre en la universidad acaba de terminar el primer borrador de su tesis, ésta tiene 700 páginas. Dicho estudiante escribió a máquina el borrador y está interesado en saber el número promedio de errores tipográficos cometidos por página, pero no quiere leer todo el borrador. Seleccionó al azar cinco

páginas y encontró los siguientes errores por página: 5, 4, 5, 3, 4.

- Construya un intervalo de confianza del 90% para la media real de errores por página que hay en su escrito.
- Construya un intervalo de confianza del 90% para la varianza real de errores por página que hay en su escrito.

Suponga que el estudiante lee todo el borrador y encuentra una desviación estándar de 0,86.

- Construya un intervalo de confianza del 90% para la media real de errores por página que hay en su escrito.

Posteriormente su novia, quien está realizando su tesis también, lo llama y le dice que su trabajo, a computadora, tiene igual cantidad de errores que el suyo. Este no le cree y le dice que tome 10 páginas al azar. Los errores por página de la tesis de su novia son los siguientes: 2, 4, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 0.

- Construya un intervalo de confianza para la diferencia de medias en los errores por páginas de ambas tesis. Asuma varianzas iguales y nivel del 90%
- Adicionalmente su novia quiere construir un intervalo de confianza del 99% para la diferencia de errores promedios de ambos trabajos. Considerando varianzas desiguales y nivel del 98%.
- Finalmente, construya un intervalo de confianza del 95% para el cociente de varianzas poblacionales de los errores. Concluya.

7. Se piensa que los estudiantes de Ingeniería industrial pueden esperar un mayor salario promedio al egresar de la carrera, que el que esperan los estudiantes de Ingeniería en logística. Recientemente se obtuvieron muestras aleatorias de ambos grupos de un área geográfica relativamente homogénea, proporcionando los datos que se observan en la tabla anexa.

Salario mensual en dólares	
Ingeniería industrial	**Ingeniería logística**
1730	1220
1820	1510
1650	1690
1610	1470
1590	1560
1740	1880
1580	1490
1730	1810
1490	1460
1810	1530
	1620
	1620
	1540
	1760

- Determine un intervalo de confianza para la diferencia entre los salarios promedios para los estudiantes de Ingeniería Industrial y Logística al titularse.
  Considere $\sigma_{industrial} = \$33$ y $\sigma_{logistica} = \$23$.
- Suponga que las varianzas poblacionales son desconocidas e iguales y construya un intervalo de confianza para la diferencia entre los salarios promedios al titularse para los estudiantes de Ingeniería Industrial y Logística (nivel de significaciòn 94,5%)
- Suponga que las varianzas poblacionales son desconocidas y diferentes y construya un intervalo de confianza para la diferencia entre los salarios promedios al titularse para los estudiantes de Ingeniería Industrial y Logística (nivel 93%)
- Construya un intervalo del 97,5% para el salario promedio al titularse de los estudiantes de Logística. Asuma varianza desconocida
- Construya un intervalo del 95% para el salario promedio al titularse de los estudiantes de Industrial. Asuma varianza conocida
- Construya un intervalo del 92% para la proporción de estudiantes en Ingeniería Industrial cuyo salario al titularse es mayor a $1650.
- Construya un intervalo del 95% para la diferencia en las proporciones de estudiantes en Ingeniería Industrial y Logística cuyo salario al titularse es mayor a $1650.

8. Una muestra de 150 profesores de Matemática tiene una edad promedio de 34 años y una desviación típica de 12 años. Una muestra de 200 profesores de Química tiene una edad promedio de 42 años y desviación típica de 8 años.

- Hallar los límites de confianza al 95% y 99% para la diferencia de las edades promedios de las poblaciones de ambos tipos. Asuma que las varianzas poblacionales de ambas muestras son iguales.
- ¿Puede decirse, en base a los intervalos construidos, que poseen en promedio edades iguales?
- Construya un intervalo de confianza del 98% para el cociente de las varianzas.

9. Una institución educativa posee en su matrícula 500 estudiantes. Una muestra de 40 estudiantes elegidos al azar revela una estatura promedio de 145,64cm y una desviación típica de 15,44cm.

- Hallar los límites de confianza al 95% y 99% para la estimación de la estatura media de los estudiantes de la institución educativa
- ¿Con qué grado de confianza se puede decir que la estatura media de los estudiantes de la institución es145,64 $\pm$ 3,5 cm?

10. La puntuación máxima obtenida por estudiantes de Ingeniería en la asignatura Diseño de Experimentos se dice que sigue una distribución normal con media desconocida y desviación de 2,73 puntos. De una muestra de 60 estudiantes se obtuvo un promedio de sus puntuaciones en la asignatura de 9,09 puntos en una escala de 1-20. Hallar los límites de confianza, al 94%, para la media de las puntuaciones máximas obtenidas por los estudiantes en diseño de experimentos.

11. En determinada zona escolar se ha determinado que los padres representantes llevan a sus hijos a las escuelas más o menos a la misma hora. La proporción de hombres (padres) y de mujeres (madres) que llevan a sus hijos a la escuela es desconocida. Una muestra aleatoria de 100 estudiantes indicó que el 70% de ellos son llevados

por sus padres al colegio. Hallar, por separado, los límites de confianza al 99% para la proporción de estudiantes que son llevados a las escuelas por cada representante (madre y padre).

12. Se conoce que el número de horas que tarda un estudiante en construir un diseño de una casa utilizando AutoCad versión 2019 sigue una distribución normal con media desconocida y desviación típica de 0,74 h. De un grupo de estudiantes que utilizan este programa se seleccionó una muestra aleatoria de 100 estudiantes, obteniéndose una media de 3,82 horas. El número de horas para construir el diseño utilizando otra versión (AutoCad versión 2017), sigue también una distribución normal con media desconocida y desviación típica de 0,90 h, de un grupo de estudiantes que utilizan este programa se seleccionó una muestra aleatoria de 90 estudiantes, obteniéndose una media de 6,75 horas. Hallar los límites de confianza para la diferencia de medias de las horas en diseñar el bosquejo por ambos grupos de estudiantes.

13. En una universidad, la altura de los estudiantes varones sigue una distribución $N(\mu;7,5)$. Hallar el tamaño de la muestra para estimar μ con un error inferior a ± 2 cm, con un nivel de confianza del 0,90.

14. El Departamento de Bienestar estudiantil de una universidad lleva a cabo una jornada para caracterizar a los estudiantes de nuevo Ingreso de la carrera de Enfermería, obteniéndose los siguientes valores:

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso	110	132	122	132	165	114	123	132	133	132
Talla	5,24	5,6	5,77	5,8	5,91	5,32	5,28	5,5	5,9	5,55

Estudiante	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Peso	135	134	139	123	169	156	150	128	143	123
Talla	5,44	5,35	5,76	5,23	5,33	5,30	5,41	5,65	5,42	5,48

Suponiendo que la talla y el peso de los estudiantes siguen distribuciones normales, hallar los intervalos de confianza al 90% para ambos parámetros.

15. Se intenta estudiar la influencia de los hábitos que poseen un grupo de niños (hacer deporte, mirar 8 horas al día la TV) con su rendimiento académico. Para ello, se seleccionan dos grupos de niños, el primero con hábitos de hacer algún deporte diariamente (grupo 1) y el segundo grupo con hábitos de mirar TV ocho horas diarias (grupo 2), y se obtuvo su rendimiento académico (escala 0-100 puntos):

Grupo 1	100	88	100	98	100	92	96	100	96	96
Grupo 2	90	92	96	96	90	90	90	92	92	90

- Calcule e interprete el intervalo de confianza al 98% para la diferencia de las puntuaciones en ambos tipos de prueba μ^1-μ^2.
- Calcule e interprete el intervalo del 99% para el cociente de varianzas poblacionales

17. El Ministerio de Educación colombiano, se encuentra preocupado por los índices de alcoholismo en los adolescentes y cómo esto repercute en sus estudios universitarios. Para disminuir esta situación ha contactado a un grupo de educadores sociales para que implementen un programa de ayuda y concienciación a tales estudiantes. Por tal motivo, toma una muestra de 25 estudiantes a los cuales se les aplicará el programa (experimental) y a otro grupo no (control). Luego de tres meses de realizar este experimento, los somete a pruebas en materias donde se tenían los más bajos índices de rendimiento obteniendo que el grupo experimental obtuvo una media de 17,3 puntos (escala 1-20) con una varianza de 9,3 ptos^2 y el grupo control una media de 11,45 puntos con varianza de 13,3 ptos^2. En base a la información, construya un intervalo al 95% para la diferencia en los rendimientos asumiendo varianzas poblacionales desconocidas y diferentes. En base al intervalo construido, ¿puede afirmarse que el programa de ayuda tuvo efectos beneficiosos en los estudiantes?

18. El director de la escuela de Licenciatura en Trabajo Social del Instituto Técnico de Venezuela (ITV), ha encontrado que existen dificultades en cuanto a la hora de llegada de los estudiantes a su institución, debido a la lejanía donde viven. Un estudio arrojó, que existen quienes viven: a menos de 3 km de la institución, entre 3 y 10 km de la institución y a más de 10 km de la institución. A continuación, se encuentra una muestra aleatoria de estudiantes clasificados de acuerdo con el sexo y a la distancia en la que viven:

Distancia / Sexo	Masculino	Femenino	Total
Menos de 3 km	30	20	50
Entre 3 y 10 km	10	40	50
A más de 10 km	80	90	170
Total	120	150	270

- Construya un intervalo de confianza del 90% para la proporción real de hombres que viven a más de 10 km de la ciudad
- Construya un intervalo de confianza del 95% para la proporción real de mujeres en la institución
- Construya un intervalo de confianza del 96% para la diferencia en las proporciones de hombres y mujeres que viven a más de 10 km de la ciudad

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 3 de los propuestos

Un dedicado estudiante universitario quiere determinar cuánto tiempo emplea en promedio resolviendo ejercicios de Matemáticas financieras. Para ello, escoge al azar 15 ejercicios parecidos de su libro preferido y los resuelve, obteniendo una media de 8 min y una varianza de 4,5 min^2.

• Si el tiempo promedio para resolver ejercicios, sigue una distribución aproximadamente normal; construya un intervalo de confianza al 95% para el tiempo promedio.

Datos:

n = 15 ejercicios

$\overline{X}$ = 8 min

S^2 = 4,5min^2

1-α = 0,95, α=0,05

<u>Solución:</u>

$$IC_{\mu(95\%)} = \left(\overline{X} \pm t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(8 \pm t_{0,025} * \frac{2,12}{\sqrt{15}}\right) = \left(8 \pm 2,365 * \frac{2,12}{\sqrt{15}}\right)$$

$$IC_{\mu(95\%)} = (6,70;9,30)$$

• Si se conoce que la varianza poblacional es de 7,7 min^2. Construya un intervalo del 95% para el tiempo promedio.

Datos:

n = 15 ejercicios

$\overline{X}$ =8 min

σ^2 = 7,7min^2

1-α = 0,95, α=0,05

$$IC_{\mu(95\%)} = \left(\overline{X} \pm Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(8 \pm Z_{0,975} * \frac{2,77}{\sqrt{15}}\right) = \left(8 \pm 1,96 * \frac{2,77}{\sqrt{15}}\right)$$

$$IC_{\mu(95\%)} = (6,60;9,40)$$

- Compare los resultados y concluya

Ambos resultados se encuentran similares, lo que quiere decir que las varianzas tanto poblacional como muestral arrojan valores muy parecidos en cuanto a los intervalos construidos. El tiempo promedio real en la resolución de los ejercicios de Matemáticas financieras se encuentra entre 6,6 y 9,4 min aproximadamente con un nivel del 95% de confianza.

Ejercicio 5 de los propuestos

De 1000 casos de estudiantes que han desertado en la universidad seleccionados al azar, 823 resultaron por problemas familiares.

- Construya un intervalo de confianza de 95% para el índice de casos de desertación en la universidad por problemas familiares.

X= Número de casos de desertación en la universidad por problemas familiares
X~Binomial(x; 1000; p)

$$\hat{p} = \frac{823}{1000} = 0{,}823$$

n=1000 >30

<u>Solución:</u>

$\hat{p}$ aprox Normal(p ; $\frac{p*q}{n}$)

$$IC_{p(95\%)} = \left(\hat{p} \pm Z_{1-\alpha/2} * \sqrt{\frac{\hat{p}*\hat{q}}{n}}\right) = \left(0{,}823 \pm Z_{0{,}975} * \sqrt{\frac{(0{,}823)*(1-0{,}823)}{1000}}\right)$$

$$IC_{p(95\%)} = \left(0{,}823 \pm 1{,}96 * \sqrt{\frac{(0{,}823)*(1-0{,}823)}{1000}}\right) = (0{,}7993\,;0{,}8467)$$

- ¿Cuál sería el tamaño de la muestra necesario para tener una confianza de 95% de que el error al estimar este índice es menor que 0,03?

$$IC_{p(95\%)} = \left(\hat{p} \pm Z_{1-\alpha/2} * \sqrt{\frac{\hat{p}*\hat{q}}{n}}\right) = (\hat{p} \pm \text{ErrorEstándar})$$

$$\Rightarrow EE = Z_{1-\alpha/2} * \sqrt{\frac{\hat{p}*\hat{q}}{n}} < 0{,}03$$

$$Z_{0{,}975} * \sqrt{\frac{(0{,}823)*(1-0{,}823)}{n}} < 0{,}03 \Leftrightarrow (Z_{0{,}975})^2 * \frac{(0{,}823)*(1-0{,}823)}{n} < (0{,}03)^2$$

$$\Leftrightarrow n > (Z_{0{,}975})^2 * \frac{(0{,}823)*(1-0{,}823)}{(0{,}03)^2} \Leftrightarrow n > (1{,}96)^2 * \frac{(0{,}823)*(1-0{,}823)}{(0{,}03)^2} \Leftrightarrow n > 622$$

Ejercicio 8 de los propuestos

Una muestra de 150 profesores de Matemática tiene una edad promedio de 34 años y una desviación típica de 12 años. Una muestra de 200 profesores de Química tiene una edad promedio de 42 años y desviación típica de 8 años.

- Hallar los límites de confianza al 95% y 99% para la diferencia de las edades promedios de las poblaciones de edad de ambos profesores. Asuma que las varianzas poblacionales de ambas muestras son iguales.

$\overline{X}$= edad promedio de los profesores (años)

$\overline{X}_A$ =34 años $\overline{X}_B$ =42 años

s_A =12 años s_B =8 años

n_A =150 n_B =200

Con varianzas poblacionales desconocidas pero iguales

$T_{0{,}995\,,\,348}$ = 2,575

v= 150 +200 – 2 = 348

Solución:

$T_{0{,}975\,,\,348}$ = 1,9668

$$IC_{\mu_A-\mu_B(95\%)} = \left(\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right) \pm t_{\alpha/2} * Sp\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \right)$$

$$S_p = \sqrt{\frac{s_A{}^2(n_A-1)+s_B{}^2(n_B-1)}{n_A+n_B-2}} = \sqrt{\frac{12^2(150-1)+8^2(200-1)}{150+200-2}} = 9{,}91226$$

$$\Rightarrow IC_{\mu_A-\mu_B(95\%)} = \left((42-34) \pm t_{0{,}975} * 9{,}91226\sqrt{\frac{1}{150}+\frac{1}{200}} \right)$$

$$IC_{\mu_A-\mu_B(95\%)} = \left((42-34) \pm 1{,}9668 * 9{,}91226\sqrt{\frac{1}{150}+\frac{1}{200}} \right) = (5{,}89\,;10{,}11)$$

• ¿Puede decirse, en base a los intervalos construidos que poseen en promedio edades iguales?

No puede afirmarse tal situación debido a que, en ambos intervalos, la diferencia de las edades no contiene el valor cero (0) por lo que sí existe una diferencia entre ambos grupos poblacionales con un 95% y 99% de confianza.

- Construya un intervalo de confianza del 98% para el cociente de las varianzas.

$$\frac{s_a^2}{s_b^2}\frac{1}{f_{\alpha/2,n_a-1,n_b-1}} \le \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} \le \frac{s_a^2}{s_b^2} f_{\alpha/2,n_b-1,n_a-1}$$

X= edad promedio de los profesores (años)

s_A =12 años s_B =8 años

n_A =150 n_B =200

$1-\alpha = 98\%$, $\alpha = 2\%$

$$f_{\alpha/2, n_a-1, n_b-1} = f_{0,01,149,199} = 1{,}4243$$
$$f_{\alpha/2, n_b-1, n_a-1} = f_{0,01,199,149} = 1{,}4363$$

(de la tabla de distribución F en el Anexo 2. Tabla F)

$$\frac{12^2}{8^2}\frac{1}{1{,}4243} \le \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} \le \frac{12^2}{8^2} * 1{,}4363$$

$$1{,}58 \le \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} \le 3{,}23$$

Ejercicio 9 de los propuestos

Una institución educativa posee en su matrícula 500 estudiantes. Una muestra de 40 elegidos al azar revela una estatura promedio de 145,64 cm y una desviación típica de 15,44 cm.

- Hallar los límites de confianza al 95% y 99% para la estimación de la estatura media de los estudiantes de la institución educativa

- ¿Con qué grado de confianza se puede decir que la estatura media de los estudiantes de la institución es145,64 ± 3,5 cm?

X= estatura de los estudiantes

$\overline{X}$ =145,64 cm

s =15,44 cm

n =40

Intervalo al 95%

$$IC_{\mu(95\%)} = \left(\overline{X} \pm t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(145{,}64 \pm t_{0{,}025} * \frac{15{,}44}{\sqrt{40}}\right) = \left(145{,}64 \pm 2{,}0227 * \frac{15{,}44}{\sqrt{40}}\right)$$

$$IC_{\mu(95\%)} = (140{,}703; 150{,}577)$$

Intervalo al 99%

$$IC_{\mu(99\%)} = \left(\overline{X} \pm t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(145{,}64 \pm t_{0{,}005} * \frac{15{,}44}{\sqrt{40}}\right) = \left(145{,}64 \pm 2{,}7079 * \frac{15{,}44}{\sqrt{40}}\right)$$

$$IC_{\mu(99\%)} = (139{,}0297; 152{,}2503)$$

$$IC_{\mu(?\%)} = \left(\overline{X} \pm t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 145{,}64 \pm 3{,}5 \Leftrightarrow t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}} = 3{,}5 \Leftrightarrow t_{\alpha/2} = 3{,}5 * \frac{\sqrt{n}}{s}$$

$$\Leftrightarrow t_{\alpha/2} = 3{,}5 * \frac{\sqrt{40}}{15{,}44} \Leftrightarrow t_{\alpha/2} = 1{,}4337 \Leftrightarrow \alpha/2 = 0{,}9202 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0{,}8404$$

$$(1-\alpha)\% = 84{,}04\%$$

<u>NOTA:</u> Los cálculos de probabilidades para las distintas distribuciones se realizaron con Excel, para efectos prácticos realice las aproximaciones correspondientes con las tablas estadísticas y compare (Anexo 2).

Autoevaluación 6

1. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considérense los siguientes estimadores de μ:

$T1 = (X_1 + X_2 + \ldots + X_7)/7$
$T2 = (2X_1 - X_6 + X_4)/2$

- ¿Alguno de los dos estimadores es insesgado?
- ¿Cuál estimador es el mejor?¿En qué sentido es mejor?

2. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 / n$ es un estimador sesgado de σ^2. ¿Qué ocurre con el sesgo cuando el tamaño de la muestra n se incrementa?

3. Un artículo sobre las mejores universidades evaluadas en el continente asiático revela el ranking de éstas y se presenta la información obtenida de una muestra de nueve de ellas en la siguiente tabla:

Universidad	IPI	ACUS	MNA	ESD	TGM	UUN	UND	UAE	UNE
Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntuación	992,4	991,5	990,7	990,66	989,01	988,9	988,43	987,9	987,88

- Encuentre un intervalo de confianza del 90% para la puntuación obtenida promedio en las universidades.
- ¿Los resultados de los cálculos apoyan la afirmación de que la puntuación media es 995 puntos?

4. Un sondeo de 100 estudiantes elegidos al azar en una universidad indica que el 55% de ellos estaban a favor de un cierto candidato para el centro de estudiantes de su facultad.

- Hallar los límites de confianza al 90,5% y 93% para la proporción de todos los estudiantes a favor de ese candidato.
- De qué tamaño hay que tomar el sondeo para tener confianza al 95% de que el candidato saldrá elegido?

CAPÍTULO 7

Pruebas de hipótesis
Con aplicaciones en jurisprudencia

Relacionadas con el ODS 16 "Paz, justicia e instituciones sólidas." Este ODS procura promover sociedades justas, pacíficas e inclusivas.

CONCEPTOS BÁSICOS

Para ilustrar la noción de una prueba de hipótesis estadística...

Supóngase que se tiene interés en el tiempo promedio de espera antes de entrar a un juzgado por las personas que van a ser enjuiciadas. Bajo situación normal, el objetivo es tener un tiempo promedio de espera de 30 minutos, en un juzgado que procesa a personas con las mismas características.

El secretario principal decide realizar una investigación de tal situación a menos que se encuentre una evidencia sustancial de que el tiempo promedio de espera por los ciudadanos antes de entrar al juzgado supera a los 30 minutos.

La evidencia estará en una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución de interés para el tiempo promedio de espera. ¿Cómo decidir si tal situación se mantiene? Nótese que el objetivo no es, estimar per se el tiempo promedio de espera, sino determinar si el valor de μ es de 30 minutos.

Ahora suponga que:

X =tiempo de espera antes de entrar al juzgado es una V.A. continua tal que:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

de donde:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Esta es la denominada hipótesis nula H_0:

$$H_0 : \mu = \mu_0; \ \mu = 30 \text{ min.}$$

Estando la situación en condiciones normales: si al tomar una muestra aleatoria de tamaño n personas y el tiempo promedio muestral es superior a 35 min, se decide detener y revisar (Rechazo la H_0). De lo contrario el proceso continúa.

Esto es:

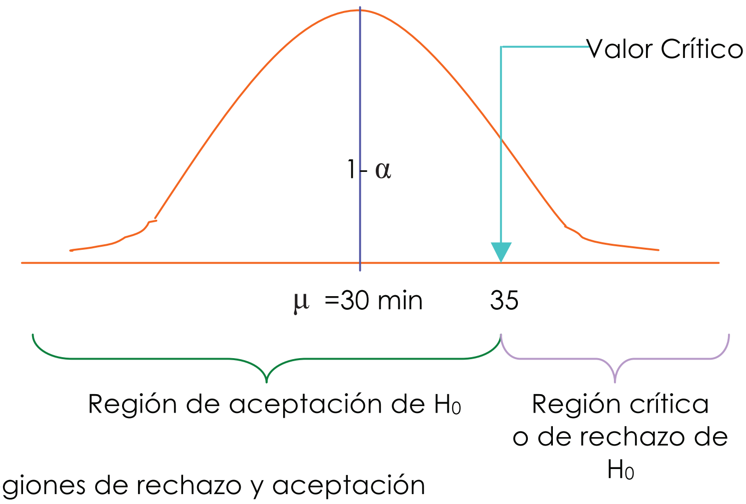


Figura. 35. Regiones de rechazo y aceptación

Se define una alternativa; una hipótesis alternativa:

$$H_1 : \mu > \mu_0 ; \;\; \mu > 30 \text{ min}$$

Tipos de regiones críticas.

Cuando se prueba una hipótesis nula simple vs. una hipótesis alternativa compuesta.

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

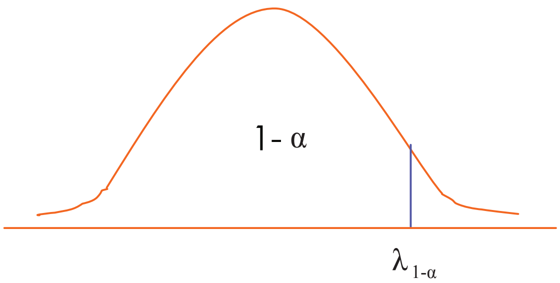


Figura. 36. Distribución de una cola a la derecha

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

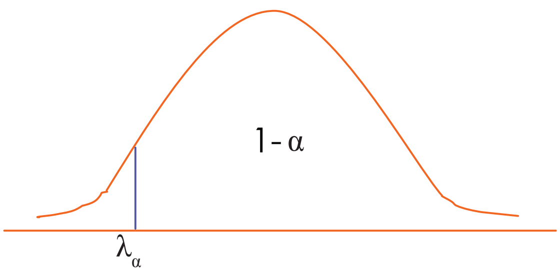


Figura. 37. Distribución de una cola a la izquierda

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

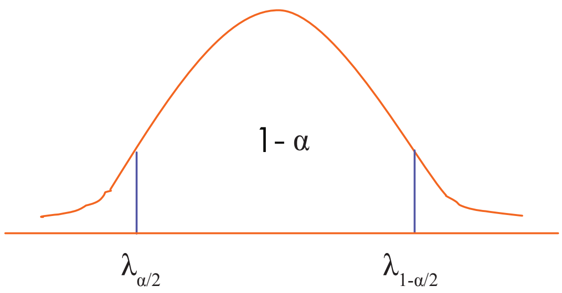


Figura. 38. Distribución de dos colas

Hipótesis Nula vs. Hipótesis Alternativa ⟷ Hipótesis Simple vs. Hipótesis Compuesta

Las posibles situaciones se presentan en la tabla 26.

Tabla 26.
Tabla de decisión y tipos de errores

Decisión	Estado de la hipótesis nula	
	H_0 Cierta	H_0 Falsa
Acepto H_0	**Decisión correcta**	**Error Tipo II**
Rechazo H_0	**Error Tipo I**	**Decisión correcta**

Veamos cada uno de los casos gráficamente:

Supóngase que la proporción de votantes a favor de un candidato político es de 60%. Si se plantea la siguiente Hipótesis Nula: H_0: p = 0,60 y con el análisis realizado se rechaza H_0, se comete un error que se denomina Error Tipo I. Este es el que se comete cuando se rechaza una hipótesis nula que es verdadera. (Ver caso 1 de la Figura 39).

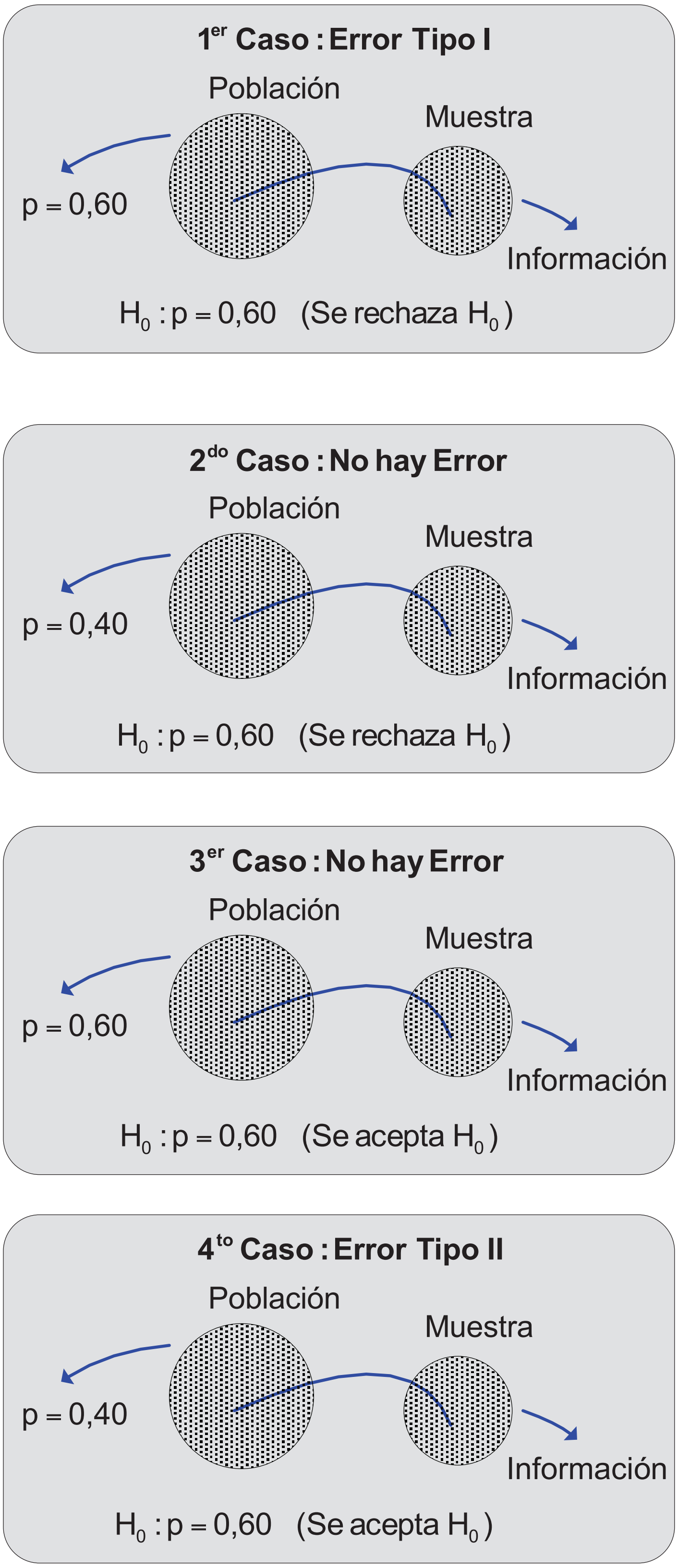


Figura 39. Tipos de errores en una prueba de hipótesis

La Probabilidad de rechazar H_0, dado que H_0 es cierta, se define como la Probabilidad de cometer el error tipo I y se denota por α, tal que, $0 \leq \alpha \leq 1$.

La Probabilidad de no rechazar H_0, dado que H_0 es falsa, se define como la Probabilidad (o tamaño) del error tipo II y se denota por β, tal que, $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$P(\text{Error tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0/H_0 \text{ es cierta}) = \alpha\,(\text{nivel de significación})$$

$$P(\text{Error tipo II}) = P(\text{Aceptar } H_0/H_0 \text{ es falsa}) = \beta$$

$$1 - \beta = P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ es falsa}) = \text{Potencia de la prueba}$$

Si se realiza una prueba sobre una muestra de 280 votantes y se observa cual es la proporción de ellos que están a favor del candidato político Mujica. La proporción muestral $\hat{p}$ es un estimador de la proporción poblacional P. Un valor de $\hat{p}$ cercano al valor hipotético de p = 0,60 es una evidencia de que el valor verdadero de p es 0,60, esto es, apoya H_0. Por otra parte, un valor diferente de 0,60 constituye una evidencia que apoyaría a H_1.

La proporción muestral $\hat{p}$ puede tomar muchos valores. Supóngase que si $0{,}58 \leq \hat{p} \leq 0{,}62$ entonces se Acepta H_0 y que si $\hat{p} < 0{,}58$ ó $\hat{p} > 0{,}62$, entonces se Acepta H_1. Esto da lugar a lo que se denomina **Regiones de Rechazo y Aceptación** y se muestran en la figura 40.

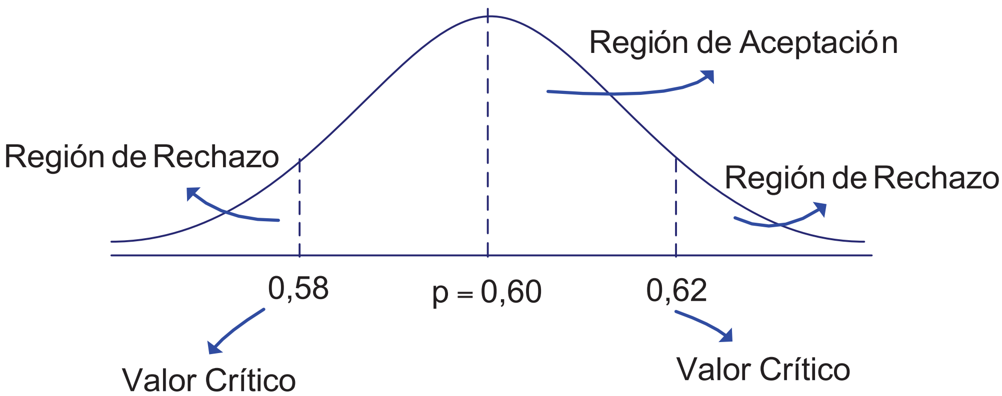


Figura 40. Regiones de rechazo y aceptación

En el ejemplo se presenta un Error Tipo I cuando $\hat{p} < 0{,}58$ ó $\hat{p} > 0{,}62$ (valores provenientes de la muestra) y la verdadera proporción de votantes es p = 0,60 (valor poblacional). Y se presenta un Error Tipo II cuando $0{,}58 \leq \hat{p} \leq 0{,}62$ y la verdadera proporción de votantes es, por ejemplo, p = 0,40.

Función Potencia

La función $P(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ recibe el nombre de función potencia y representa la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa.

Gráficamente:

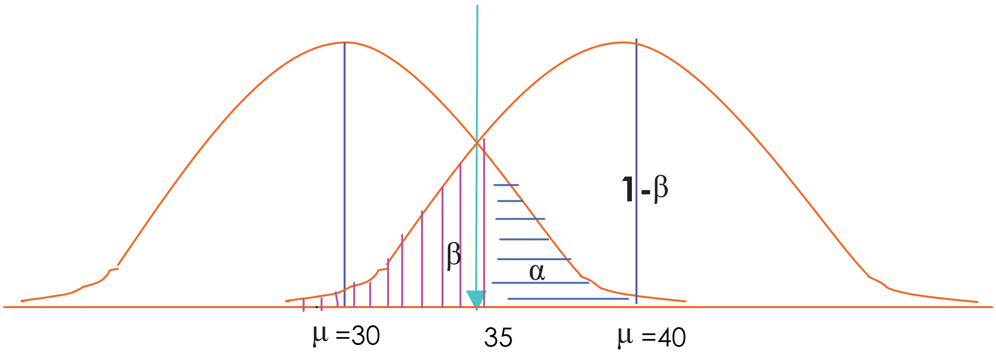


Figura 41. Función potencia

Para el ejemplo planteado inicialmente, se tiene que:

Naturaleza del problema: Inferencia con respecto a la media poblacional μ

Estadístico de prueba: la media muestral

Modelo teórico:

X = tiempo de espera antes de entrar al juzgado es una V.A continua tal que:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

de donde:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

por lo que:

$$Z = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{N (0,1)}$$

Nivel de significación = 0,05

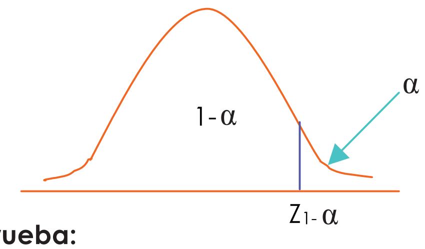
Hipótesis:

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \ \mu = 30 \min$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 ; \ \mu > 30 \min$$

Región Crítica:

Z_{1-} =$Z_{0,95}$ =1,645 (Anexo 2. Tabla C)



Cálculo del estadístico de prueba:

$$Z_C = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(28-30)}{\frac{3{,}4}{\sqrt{25}}} = -2{,}94$$

Decisión:

$Z_C < Z_{\alpha/2}$; Cae en la región de aceptación de la hipótesis nula. Por lo tanto, no hay evidencias como para afirmar que dicha hipótesis sea falsa.

Conclusión:

No hay suficiente evidencia como para suponer que el tiempo promedio de espera en el citado jugado no sea de 30 min.

Una prueba de hipótesis estadística con respecto a alguna característica desconocida de la población de interés, es cualquier regla para decidir si se rechaza la hipótesis nula con base en una muestra aleatoria de la población. Esa regla contempla los siguientes pasos:

1. Del contexto del problema, identificar el parámetro θ de interés
2. Establecer la Hipótesis Nula:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

3. Seleccionar una Hipótesis Alternativa Apropiada:

$$H_1: \theta \neq \theta_0 \qquad H_1: \theta > \theta_0 \qquad H_1: \theta < \theta_0$$

4. Seleccionar un nivel de significación α, P(rechazar H_0 / H_0 es verdadera), se recomienda utilizar un α menor o igual a 10%
5. Seleccionar el Estadístico de prueba apropiado
6. Calcular el valor del estadístico de prueba a partir de los datos muestrales
7. Tomar una decisión: Rechazar H_0 o no Rechazar H_0

En el ejemplo presentado se expuso el procedimiento general para probar una hipótesis nula simple versus una hipótesis alternativa compuesta, para el caso en que se deseaba hacer inferencia con respecto al parámetro μ a partir de la media muestral cuando se muestreaba una población normal con varianza conocida.

Dicho procedimiento puede ser aplicado para hacer inferencia con respecto a diversos parámetros o situaciones dentro de las que se destacan:

- Prueba de hipótesis con respecto a μ cuando se muestrea una población normal con varianza desconocida.
- Prueba de hipótesis con respecto a μ cuando se muestrea una población normal.
- Prueba de hipótesis con respecto al parámetro de proporción "p cuando se muestrea una población binomial.
- Prueba de hipótesis con respecto a μ_1 - μ_2 cuando se muestrean dos poblaciones normales independientes con varianza conocida.
- Prueba de hipótesis con respecto a μ_1 - μ_2 cuando se muestrean dos poblaciones normales independientes con varianza desconocidas pero iguales.
- Prueba de hipótesis con respecto a μ_1 - μ_2 cuando se muestrean dos poblaciones normales independientes con varianza desconocidas pero diferentes.
- Prueba de hipótesis con respecto al parámetro p_1 - p_2 cuando se muestrean dos poblaciones binomiales independientes.
- Prueba de hipótesis con respecto al parámetro $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ cuando se muestrean dos poblaciones normales independientes.

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN CON VARIANZA CONOCIDA

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$1)\ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}$$

Estadístico de Prueba: $Z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$\begin{array}{ll} z_0 \geq z_{1-\alpha/2} \ \text{ ó } \ z_0 \leq z_{\alpha/2} & \text{en } 1) \\ z_0 \geq z_{1-\alpha} & \text{en } 2) \\ z_0 \leq z_{\alpha} & \text{en } 3) \end{array}$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA IGUALDAD DE DOS MEDIAS POBLACIONALES CON VARIANZAS CONOCIDAS

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$1)\ \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{array}$$

Estadístico de Prueba:

$$Z_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$z_0 \geq z_{1-\alpha/2} \quad ó \quad z_0 \leq z_{\alpha/2} \quad \text{en 1)}$$
$$z_0 \geq z_{1-\alpha} \quad \text{en 2)}$$
$$z_0 \leq z_{\alpha} \quad \text{en 3)}$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN CON VARIANZA DESCONOCIDA

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$1)\ H_0 : \mu = \mu_0 \qquad 2)\ H_0 : \mu = \mu_0 \qquad 3)\ H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

Estadístico de Prueba:

$$T_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$t_0 \geq t_{1-\alpha/2,n-1} \quad ó \quad t_0 \leq t_{\alpha/2,n-1} \quad \text{en 1)}$$
$$t_0 \geq t_{1-\alpha,n-1} \quad \text{en 2)}$$
$$t_0 \leq t_{\alpha,n-1} \quad \text{en 3)}$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA IGUALDAD DE DOS MEDIAS POBLACIONALES CON VARIANZAS DESCONOCIDAS PERO IGUALES

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$1)\ H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad 2)\ H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad 3)\ H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 > \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

Estadístico de Prueba:

$$T_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$Sp = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$t_0 \geq t_{1-\alpha/2,n_1+n_2-2} \quad ó \quad t_0 \leq t_{\alpha/2,n_1+n_2-2} \quad \text{en } 1)$$
$$t \quad \geq t_{\ \alpha,n \ \ +n_2-2} \quad \text{en } 2)$$
$$t_0 \leq t_{\alpha,n_1+n_2-2} \quad \text{en } 3)$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA IGUALDAD DE DOS MEDIAS POBLACIONALES CON VARIANZAS DESCONOCIDAS Y DIFERENTES

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$1)\ H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad 2)\ H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad 3)\ H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 > \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

Estadístico de Prueba:
$$T_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$t_0 \geq t_{1-\alpha/2,v} \quad ó \quad t_0 \leq t_{\alpha/2,v} \quad \text{en } 1)$$
$$t_0 \geq t_{1-\alpha,v} \quad \text{en } 2)$$
$$t_0 \leq t_{\alpha,v} \quad \text{en } 3)$$

$$v = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$1)\ H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad 2)\ H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad 3)\ H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \qquad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Estadístico de Prueba:
$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$x \quad \geq x_{1\ \alpha/\ \ n\ 1} \quad ó \quad x \quad \leq x_{\alpha/\ \ n\ 1} \quad \text{en } 1)$$
$$x_0^2 \geq x_{1-\alpha,n-1}^2 \quad \text{en } 2)$$
$$x_0^2 \leq x_{\alpha,n-1}^2 \quad \text{en } 3)$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA IGUALDAD DE DOS VARIANZAS POBLACIONALES

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$1)\ H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad 2)\ H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad 3)\ H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$\quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \qquad \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \qquad \quad H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

Estadístico de Prueba: $$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$f_0 \geq f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \quad \text{ó} \quad f_0 \leq f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \quad \text{en 1)}$$
$$f_0 \geq f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1} \quad \text{en 2)}$$
$$f_0 \leq f_{\alpha, n_1-1, n_2-1} \quad \text{en 3)}$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA PROPORCIÓN DE UNA POBLACIÓN

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$2)\ H_0: p = p_0 \qquad 1)\ H_0: p = p_0 \qquad 3)\ H_0: p = p_0$$
$$\quad H_1: p > p_0 \qquad \quad H_1: p \neq p_0 \qquad \quad H_1: p < p_0$$

Estadístico de Prueba: $$Z_0 = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$z_0 \geq z_{1-\alpha/2} \quad \text{ó} \quad z_0 \leq z_{\alpha/2} \quad \text{en 1)}$$
$$z_0 \geq z_{1-\alpha} \quad \text{en 2)}$$
$$z_0 \leq z_{\alpha} \quad \text{en 3)}$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA IGUALDAD DE DOS PROPORCIONES POBLACIONALES

Plantear alguna de las siguientes Hipótesis:

$$1)\ H_0: p_1 = p_2 \quad 2)\ H_0: p_1 = p_2 \quad 3)\ H_0: p_1 = p_2$$

$$ H_1: p_1 \neq p_2 \quad H_1: p_1 > p_2 \quad H_1: p_1 < p_2$$

Estadístico de Prueba: $$Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} \qquad \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p}$$

Decisión: Rechazar H_0 si:

$$z_0 \geq z_{1-\alpha/2} \quad \text{ó} \quad z_0 \leq z_{\alpha/2} \quad \text{en 1)}$$

$$z_0 \geq z_{1-\alpha} \quad \text{en 2)}$$

$$z_0 \leq z_{\alpha} \quad \text{en 3)}$$

Ejemplo

Supóngase que se está interesado en el estudio de algunos aspectos relacionados con las características físicas y sociales de los reos que se encuentran en un centro penitenciario de la ciudad de Bogotá en el año 2017.

a. En primer lugar, se desea saber si la duración promedio de la condena para todos los reclusos en el centro superaba los 18 años, para lo cual se tomó una muestra aleatoria de 55 reclusos, de la cual se obtuvo un promedio de 14 años y una desviación estándar de 5,5 años.
b. Posteriormente, en base a la información anterior se quería conocer si la varianza de esa localidad de reos podía ser considerada superior a la de hace 5 años, en la cual se obtuvo una varianza poblacional de 12,25 años^2.
c. Por otra parte, a sabiendas de que, en la ciudad de Bogotá por ser capital, posee mucha demanda de procesados, se ha mantenido una proporción de reos que provienen de otros departamentos de 0,35; se quería confirmar la sospecha de que durante ese año la incidencia de éstos había sido mayor, en base a una muestra aleatoria de 1000 reclusos en las que se encontró una proporción de foráneos del 18%.
d. Es sabido que la mayor proporción de reos que poseen condenas más altas son los provenientes de Palmira y Pereira. En esta oportunidad se desea saber si el tiempo promedio de condena obtenido por los reos en estas dos ciudades, eran similares o no en cuanto a su variabilidad. Para ello se tomaron dos muestras aleatorias en base a las cuales se generó la siguiente información:

Ciudad	**Número de reclusos**	**Tiempo condena Promedio (meses)**	**Desviación estándar muestral (meses)**
Pereira	25	187	10
Palmira	31	165	6,5

Además, con la información del punto anterior se quiso comparar el tiempo promedio de condena de los reos de estas dos ciudades y definir si existían razones como para suponer que la ciudad de Pereira era más peligrosa (asumiendo mayor número de años de condena) que Palmira.

e. Un aspecto importante para realizar la clasificación interna de los reos es el grupo etario al cual pertenecen, para de esta forma establecer aspectos como: actividades, horarios de visitas, comidas, entre otros. Se creía que existía diferencia entre las edades promedio de los reos provenientes de Pereira y Palmira. Para responder a esta incógnita se tomaron dos muestras aleatorias independientes de reos de ambas ciudades y se evaluó el porcentaje de reclusos jóvenes en cada una (grupo joven: 21-26 años). Los resultados se muestran a continuación:

Cultivar	**Tamaño de Muestra**	**Proporción de reos jóvenes**
Pereira	150	0,20
Palmira	150	0,18

¿Había razones para inferir que las proporciones de las ciudades de acuerdo a este aspecto son iguales?

Solución de Parte a)

En primer lugar, se deseaba saber si la duración promedio de la condena para todos los reclusos en el centro superaba los 18 años, para lo cual se tomó una muestra aleatoria de 55 reclusos, de la cual se obtuvo un promedio de 14 años y una desviación estándar de 5,5 años.

$\mu > 18$ años n = 55 reclusos $\bar{x} = 14$ años $s = 5{,}5$ años

Estimar μ. Es $\mu > 18$ años?

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s}$$

$$\bar{\text{x}} \sim t\left(\mu, s^2 \big/ \sqrt{n}\right)$$

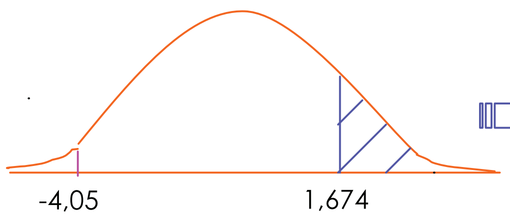
$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$

$$H_o : \mu = 18 \text{ años}$$

$$\text{H}_1 : \mu > 18 \text{ años}$$

$$t = \frac{(14 - 18)\sqrt{55}}{5{,}5} = -4{,}05$$

$t_{\underset{n-1}{1-\alpha}} = t_{\underset{54}{0{,}95}} = 1{,}674$ (Anexo 2. Tabla D)



$\Rightarrow t > t_{1-\alpha} \Rightarrow$ No se rechaza H_0

Existen evidencias estadísticas con un nivel de significación del 5%, para suponer que la duración promedio de la condena para todos los reclusos en el centro es igual a los 18 años.

Parte b) Posteriormente, en base a la información anterior se quería conocer si la varianza de esa localidad de reos podía ser considerada superior a la de hace 5 años, en la cual se obtuvo una varianza poblacional de 12,25 años^2.

Solución:

Estimar σ^2.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim Ji\text{ - }Cuadrado\,(n-1)$$

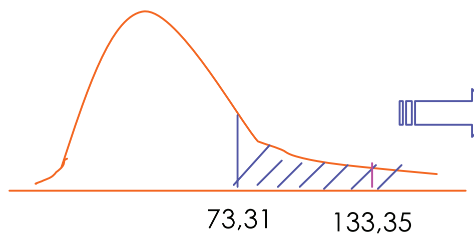
$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$

$$H_o : \sigma^2 = 12{,}25$$

$$H_1 : \sigma^2 > 12{,}25$$

$$\chi^2 = \frac{(55-1)(5{,}5)^2}{12{,}25} = 133{,}35$$

$\chi^2_{\substack{1-\alpha \\ n-1}} = \chi^2_{\substack{0{,}95 \\ 24}} = 73{,}31$ (Anexo 2. Tabla E)



$\Rightarrow \chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha} \Rightarrow$ Se rechaza H_0

Existen evidencias estadísticas con un nivel de significación del 5%, para suponer que la varianza de esa localidad es superior a la de hace 5 años anterior ($\sigma^2 = 12{,}25$).

Parte c) Por otra parte, a sabiendas de que, en la ciudad de Bogotá por ser la capital, posee mucha demanda de procesados, se ha mantenido una proporción de reos que provienen de otros departamentos de 0,35; se quería confirmar la sospecha de que durante ese año la incidencia de éstos había sido mayor, en base a una muestra aleatoria de 1000 reclusos en las que se encontró una proporción de foráneos del 18%.

Solución:

$P_0 = 0{,}35$ n = 1000 reclusos $\hat{p} = 0{,}18$

Estimar p.

$$Z = \frac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$$

$$\hat{p} \sim N\left(p, {}^{pq}/_{n}\right)$$

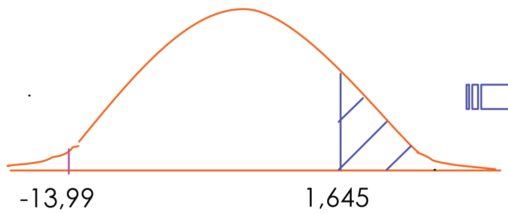
$\alpha = 0{,}05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025$

$$H_o : p = 0{,}35$$

$$H_1 : p > 0{,}35$$

$$Z = \frac{(0{,}18 - 0{,}35)}{\sqrt{\dfrac{0{,}18 * 0{,}82}{1000}}} = -13{,}99$$

$Z_{1-\alpha} = Z_{0,95} = 1{,}645$ (Anexo 2. Tabla C)



$\Longrightarrow Z > Z_{1-\alpha} \Longrightarrow$ No se rechaza H_o

Existen evidencias estadísticas con un nivel de significación del 5%, para suponer que la proporción de reos que provienen de otros departamentos se mantiene en 0,35.

Parte d) Es sabido que la mayor proporción de reos que poseen condenas más altas son los provenientes de Palmira y Pereira. En esta oportunidad se deseaba saber si el tiempo promedio de condena obtenido por los reos en estas dos ciudades, eran similares o no en cuanto a su variabilidad. Para ello se tomaron dos muestras aleatorias en base a las cuales se generó la siguiente información:

Ciudad	Número de reclusos	Tiempo condena Promedio (meses)	Desviación estándar muestral (meses)
Pereira	25	187	10
Palmira	31	165	6,5

Solución:

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \sigma_1^2$=Pereira $\quad \sigma_2^2$=Palmira

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim \text{F Snedecor}\left(n_1\text{-}1,\ n_2-1\right)$$

$\alpha = 0{,}1 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}05$

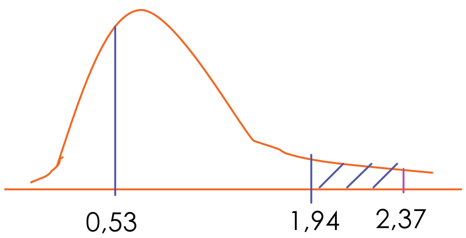
$$H_o : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \Rightarrow \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(10)^2}{(6{,}5)^2} = 2{,}37$$

$$F_{\substack{1-\alpha/2 \\ n_1-1 \\ n_2-1}} = F_{\substack{0{,}95 \\ 24 \\ 30}} = 1{,}94$$ (Anexo 2. Tabla F)

$$\frac{1}{F_{\substack{1-\alpha/2 \\ n_2-1 \\ n_1-1}}} = \frac{1}{F_{\substack{0{,}95 \\ 30 \\ 24}}} = \frac{1}{1{,}83} = 0{,}53$$



Se rechaza H_0

Existen evidencias estadísticas con un nivel de significación del 5%, para suponer que las variabilidades obtenidas en los tiempos de condena en las ciudades de Pereira y Palmira son distintas.

Parte e) Además, con la información del punto anterior sé quiso comparar el tiempo promedio de condena de los reos de estas dos ciudades y definir si existían razones como para suponer que la ciudad de Pereira era más peligrosa (asumiendo mayor número de años promedio de condena) que Palmira.

Estimar $\mu_1 - \mu_2$. Es $\mu_1 - \mu_2 = 0$?

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \gamma_0}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad Sp = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim t\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)$$

$\alpha = 0{,}1 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}05$

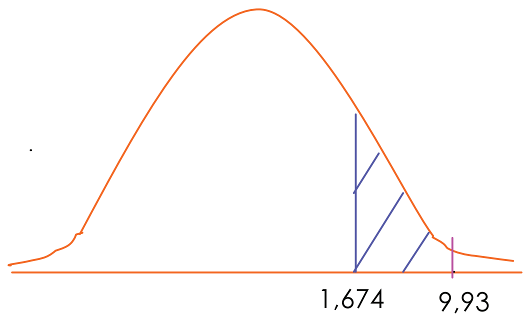
$$H_o : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 > \mu_2$$

$$Sp = \sqrt{\frac{(25-1)(10)^2 + (31-1)(6{,}5)^2}{25+31-2}} = 8{,}24$$

$$t = \frac{(187-165)-0}{8{,}24\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{31}}} = 9{,}93$$

$$t_{\substack{1-\alpha \\ n_1+n_2-2}} = t_{\substack{0{,}90 \\ 54}} = 1{,}674$$



Se rechaza H_0

Existen evidencias estadísticas con un nivel de significación del 5%, para suponer que la ciudad de Pereira era más peligrosa (asumiendo mayor número de años promedio de condena) que Palmira.

Parte e) Un aspecto importante para realizar la clasificación interna de los reos es el grupo etario al cual pertenecen, para de esta forma establecer aspectos como: actividades, horarios de visitas, comidas, entre otros. Se creía que existía diferencia entre las edades promedio de los reos provenientes de Pereira y Palmira. Para responder ésta incógnita se tomaron dos muestras aleatorias independientes de reos de ambas ciudades y se evaluó el porcentaje de reclusos jóvenes en cada una (grupo joven: 21-26 años). Los resultados se muestran a continuación:

Cultivar	**Tamaño de Muestra**	**Cantidad de reos jóvenes**	**Proporción de reos jóvenes**
Pereira	150	30	0,20
Palmira	150	27	0,18

¿Había razones para inferir que las proporciones de las ciudades de acuerdo a éste aspecto son iguales?

<u>Solución:</u>

Estimar $p_1 - p_2$. Es $p_1 - p_2 = 0$?

$$Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} \qquad \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2} \right)$$

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$

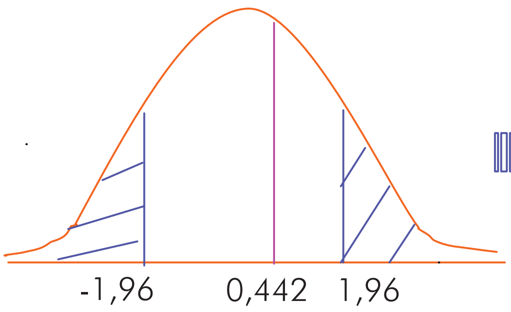
$$H_o : p_1 - p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 - p_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 \neq p_2$$

$$\hat{p} = \frac{30 + 27}{150 + 150} = 0{,}19$$

$$Z_0 = \frac{0{,}20 - 0{,}18}{\sqrt{0{,}19 * 0{,}81\left(\frac{1}{150} + \frac{1}{150} \right)}} = 0{,}442$$

$Z_{1-\alpha/2} = Z_{0,975} = 1{,}96 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = -1{,}96$ (Anexo 2. Tabla C)



$z_0 \geq z_{1-\alpha/2}$ ó $z_0 \leq z_{\alpha/2}$

No se rechaza H_o

Existen evidencias estadísticas con un nivel de significación del 5%, para suponer que las proporciones de reos jóvenes provenientes de Pereira y Palmira son iguales en el centro penitenciario.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un experimentado abogado laboral sostiene que durante sus ocho años trabajando en su empresa el 75% de los casos se deben a despidos injustificados por la misma. En una muestra de 500 extrabajadores que laboraron en la empresa, se determinó que a 350 de ellos los despidieron sin causa aparente. Determinar si la aseveración del abogado es correcta. $\alpha=0{,}05$.

2. En la ciudad de New York, un abogado penalista intenta realizar un estudio para determinar a cuánto ascienden las estafas millonarias ($) a las que has sido sometidas varias empresas de la región. Para ello, seleccionó dos condados: Broome y Tioga de los que eligió al azar un número de empresas y otras medidas: Para el condado de Broome, la muestra fue de $n=25$ empresas, el monto promedio al que ascienden sus estafas en un periodo de 10 años fue de 1,5 MM$ y la varianza de 0,3, para el condado de Tioga, la muestra fue $n=25$, el monto promedio estafado de 1,3 MM$ y la varianza de 0,2. Puede usted afirmar si ha tenido Broome un monto de estafa superior al de Tioga? $\alpha=0{,}05$.

3. Dos grupos A y B de presos consisten en 100 personas cada uno, aquejados todos de una enfermedad que han adquirido a lo largo de su permanencia en el penal. Se suministra un suero al A pero no al B (que se llama control); por lo demás ambos reciben idéntico tratamiento. Se encuentra que 80 presos del A y 65 del B se recuperan de la enfermedad. Contrastar la hipótesis del que el suero cura la enfermedad al nivel de significación 0,01; 0,05 y 0,10.

4. Un estudio llevado a cabo en el 2018 afirma que al menos el 95% de los abogados egresados de la Universidad del Zulia se dedican al derecho penal. El examen de una muestra de 200 egresados revela que 18 no se dedicaron al derecho penal. Contrastar su afirmación al nivel de significación de 0,05.

5. Hace un tiempo, las estadísticas afirmaban que un centro penitenciario procesaba en promedio, 15 reclusos diarios. Para determinar si este comportamiento se mantiene, se toma una muestra de las hojas de registro de 10 días, que dan un procesamiento promedio de 17 reclusos con desviación típica de 4 reclusos. Contrastar la hipótesis de que el centro penitenciario sigue procesando de la misma forma, con un nivel de significación del 0,05 y 0,01.

6. Dos muestras de tamaño 10 y 15 se han tomado de dos poblaciones normalmente distribuidas con varianzas respectivas 16 y 25. Si las varianzas muestrales son 20 y 8, determinar si la primera muestra tiene una varianza significativamente mayor que la segunda al nivel de significación de 0,05.

7. Con el fin de evaluar el retraso en la llegada al trabajo de los obreros de una compañía, el departamento de personal dirigido por su abogado laboral, toma al azar nueve tarjetas de control de llegada cuyos registros son: 8:10; 8:12; 8:15; 8:17; 8:08; 8:03; 8:07; 8:09 y 8:03. El sindicato de obreros a fin de lograr un mejor contrato colectivo afirma que el retraso es como máximo de 5 minutos con una dispersión de 2,90 minutos alrededor de dicho promedio. ¿Cuál cree Ud. que debe ser la posición del departamento de personal con respecto a la afirmación del

sindicato, sabiendo que la hora de entrada es 8:00 am. Asuma población normal y $\alpha = 0{,}05$.

8. Un Juez afirma que el 40% de las mujeres reconocen que su pareja presenta indicios de algún tipo de violencia. Tomada una muestra de 100 mujeres, se observó que 36 presentaban denuncias hacia su pareja con indicios de violencia. Contrastar la hipótesis del Juez para un nivel de confianza del 90%.

9. Un abogado de mesa se dio a la tarea de ubicar la cantidad de errores que poseen los expedientes de su archivo, en el que, de una muestra de 40 expedientes, la media fue de siete errores, con una desviación típica de 1,15 errores. Se solicita a otro abogado que realice el mismo procedimiento y, en este caso, tomó una muestra de 32 expedientes y se obtuvo una cantidad de errores promedio de 13, con una desviación típica de 1,06 errores. ¿Considera que la cantidad de errores promedio en el archivo del primer abogado es mayor al del segundo? Use $\alpha = 4\%$

10. Se van a probar dos nuevas estrategias de presión contra presuntos acusados dedicados al robo domiciliario (estrategia A y B). Para esto, se interrogaron 20 presuntos acusados utilizando la estrategia A y otros 20 con la B. El número medio de horas que tardaban en contar sus actos delictivos con A es de 12 horas y el número medio que tardaban con B es nueve horas.

11. ¿Se puede aceptar igualdad de varianzas si sabemos que:

$$\Sigma(X_i - \bar{X}_A)^2 = 900 \quad \text{y} \quad \Sigma(X_i - \bar{X}_B)^2 = 700\,?$$

Tomar un nivel de significación del 10%. ¿Es más efectiva la estrategia B?

12. Con el fin de estudiar el efecto de un nuevo antivirus sobre el fraude informático, se probaron 1000 computadoras en una empresa dedicada a la auditoría, de los que resultaron 572 computadoras con algún tipo violación, daño o virus. Sabiendo que tal situación se presenta en el 33% de los casos, se puede afirmar con un nivel de significación del 95% que el antivirus disminuyó el fraude?

13. El Ministerio de Relaciones exteriores de Venezuela está investigando la cantidad de pasaportes emitidos por mes, en los últimos 5 años, con el objeto de realizar predicciones futuras. Para ello, tomó una muestra de 15 meses obteniendo una media y desviación estándar muestrales de 60139 y 364 pasaportes, respectivamente. Al director del Ministerio le gustaría demostrar que la cantidad media de pasaportes excede las 60000 unidades, con una desviación menor de 400 unidades. Formule y pruebe las hipótesis apropiadas, y establezca conclusiones usando $\alpha = 0{,}05$.

14. Se usa una máquina de detección de mentiras la cual tiene un 98,95% de confiabilidad. Una muestra aleatoria de 20 acusados da como resultado una varianza muestral del tiempo en reconocer la mentira/verdad de 0,0153 segundos^2. Si la varianza del tiempo de reconocimiento excede 0,01 seg^2, los acusados no podrán ser sometidos a tal examen. ¿Hay evidencia en los datos muestrales que sugiera que la máquina de detección tiene un problema con el objetivo? Asuma población normal y $\alpha = 0{,}05$.

15. Se investiga el índice de mortalidad en dos países suramericanos (Ecuador y Perú). Para ello, se seleccionan en el 2017, dos muestras de ciudades en cada uno de tamaños n1=15 ciudades ecuatorianas y n2=17 ciudades peruanas, con medias muestrales 5,13‰, es decir, 5,13 muertes por cada 1000 habitantes en Ecuador y 6,68‰ en Perú (6,68 muestres por cada mil habitantes); y varianzas muestrales 0,35 y 0,40 respectivamente. ¿hay evidencia a favor de la afirmación de que los dos países poseen diferentes índices de mortalidad? Use α=0,05.

16. En una muestra aleatoria de 500 adultos residenciados en la ciudad de Valencia y votantes en la próxima consulta popular del 2018, se encontró que 385 estaban a favor de las modificaciones en la constitución a favor de la discriminación sexual, mientras que, en otra muestra de 400 adultos, también votantes en la próxima consulta popular del 2018 pero residenciados en la ciudad de Maracay, se encontró que 267 estaban a favor de las modificaciones en la constitución a favor de la discriminación sexual. ¿estos datos indican que hay una diferencia en el apoyo para modificar la constitución a favor de la discriminación sexual entre los residentes de las dos ciudades? Use α=0,03.

17. Un político ecuatoriano afirma que la edad promedio de los jóvenes asesinados en la ciudad de Quito entre 2017 y 2018 es de 24 años. Las personas de la Comisión Nacional de Delitos no creen tal afirmación y con base en una muestra aleatoria de 5000 registros en su sistema desean refutar tal aseveración. La media y desviación típica muestral arrojaron valores de 27 años y 10,5 años respectivamente. Pruebe la hipótesis de que la edad promedio de jóvenes asesinados en ciudad de Quito entre 2017 y 2018 es distinta de 24 años. Use nivel de significación de 2,5%.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1 de los propuestos

Un experimentado abogado laboral sostiene que durante sus 8 años trabajando en su empresa el 75% de los casos se deben a despidos injustificados por la misma. En una muestra de 500 extrabajadores que laboraron en la empresa, se determinó que a 350 de ellos los despidieron sin causa aparente. Determinar si la aseveración del abogado es correcta.α=0,05.

Prueba de hipótesis para "P"

Distribución: $\hat{p}$ aprox Normal(p ; $\frac{p*q}{n}$)

Estadístico de prueba: $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}*\hat{q}}{n}}}$

Nivel de significación: $\alpha = 0{,}05$

Hipótesis: $H_0 : p = 0{,}75$
$H_1 : p < 0{,}75$

Cálculo del estadístico de prueba:

$$Z_{calc} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}*\hat{q}}{n}}} = \frac{\frac{350}{500}-0{,}95}{\sqrt{\frac{\frac{350}{500}*\frac{150}{500}}{500}}} = \frac{0{,}70-0{,}95}{\sqrt{\frac{0{,}70*0{,}30}{500}}} = -12{,}20$$

$Z_{tab\alpha} = Z_{tab0,05} = -1{,}645$

$Z_{calc} < Z_{tab0,05} \Rightarrow$Se rechaza la $H_0 : p = 0{,}75$

Conclusiones: A un nivel de significación del 5%, se han encontrado suficientes evidencias estadísticas para rechazar la $H_0 : p = 0{,}75$. Por lo tanto se puede afirmar con un 95% de nivel de confianza, y basado en la información suministrada por la muestra, que la proporción real de despidos injustificados en la empresa es menor a la aseverada por el abogado, es decir menor a 0,75.

Ejercicio 4 de los propuestos

Un estudio llevado a cabo en el 2018 afirma que al menos el 95% de los abogados egresados de la Universidad del Zulia se dedican al derecho penal. El examen de una muestra de 200 egresados revela que 18 no se dedicaron a esta rama del derecho. Contrastar su afirmación al nivel de significación de 0,05.

Prueba de hipótesis para "P"

Distribución: $\hat{p}$ aprox Normal(p ; $\frac{p*q}{n}$)

Estadístico de prueba: $Z = \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}*\hat{q}}{n}}}$

Nivel de significación: $\alpha = 0{,}05$

Hipótesis: $\begin{array}{l} H_0 : p = 0{,}95 \\ H_1 : p > 0{,}95 \end{array}$

Cálculo del estadístico de prueba:

$$Z_{calc} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}*\hat{q}}{n}}} = \frac{\dfrac{182}{200}-0{,}95}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{182}{200}*\dfrac{18}{200}}{200}}} = \frac{0{,}91-0{,}95}{\sqrt{\dfrac{0{,}91*0{,}09}{200}}} = -1{,}98$$

$Z_{tab\alpha} = Z_{tab0,95} = 1{,}645$

$Z_{calc} > Z_{tab0,95} \Rightarrow$ Se acepta la $H_0 : p = 0{,}95$

Conclusiones: A un nivel de significación del 5%, se han encontrado suficientes evidencias estadísticas para aceptar la $H_0 : p = 0{,}95$. Por lo tanto, se puede afirmar con un 95% de nivel de confianza, y basado en la información suministrada por la muestra, que el 95% de los egresados se dedican al derecho penal, es decir que no son correctas las aseveraciones del estudio.

Ejercicio 5 de los propuestos

Hace un tiempo, las estadísticas afirmaban que un centro penitenciario procesaba en promedio, 15 reclusos diarios. Para determinar si este comportamiento se mantiene, se toma una muestra de las hojas de registro de 10 días, que dan un procesamiento promedio de 17 reclusos con desviación típica de 4 reclusos. Contrastar la hipótesis de que el centro penitenciario sigue procesando de la misma forma, con un nivel de significación del 0,05 y 0,01.

Para determinar Prueba de hipótesis para μ

Distribución: $\overline{X} \rightarrow$ t Student

Estadístico de prueba: $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{s}$

Nivel de significación: $\alpha_1 = 0{,}05$, $\alpha_2 = 0{,}01$

Hipótesis: $\begin{matrix} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu \neq 15 \end{matrix}$

Cálculo del estadístico de prueba:

$$t_{calc} = \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{s} = \frac{(17-15)\sqrt{10}}{4} = 1{,}58$$

$$t_{tab\frac{\alpha_1}{2};(n-1)} = t_{tab0,025;(9)} = -2{,}262; \qquad t_{tab\frac{\alpha_2}{2};(n-1)} = t_{tab0,005;(9)} = -3{,}250$$

$$t_{tab1-\frac{\alpha_1}{2};(n-1)} = t_{tab0,975;(9)} = 2{,}262; \qquad t_{tab1-\frac{\alpha_2}{2};(n-1)} = t_{tab0,995;(9)} = 3{,}250$$

$t_{tab0,025} < t_{calc} < t_{tab0,975} \Rightarrow$ No se rechaza la $H_0 : \mu = 15$ con α=0,05.

$t_{tab0,005} < t_{calc} < t_{tab0,995} \Rightarrow$ No se rechaza la $H_0 : \mu = 15$ con α=0,01.

Conclusiones: A un nivel de significación del 5% y del 1%, se han encontrado suficientes evidencias estadísticas para no rechazar la $H_0 : \mu = 15$. Por lo tanto, se puede afirmar que el centro penitenciario sigue procesando en promedio 15 reclusos diarios.

Autoevaluación 7

1. El sindicato internacional de trabajadores revisa algunas fábricas chinas y ha encontrado problemas significativos en cuanto a la cantidad de horas de trabajo que le asignan a sus empleados. Los investigadores visitaron tres fábricas y definieron que si la media de horas semanales que realiza un empleado se encuentra por encima de los límites legales permitidos (45 horas semanales), la fábrica tendrá problemas legales, por otro lado, si el número de horas trabajadas es menor la compañía no se encontrará en riesgo de cierre. Se toma una muestra al azar de 500 trabajadores y se obtiene un promedio de horas semanales trabajadas de 46,18 y desviación de 2,60 hrs. Use $\alpha = 0,05$ y pruebe las hipótesis necesarias.

2. Se realizó un estudio dentro del correccional de menores en la ciudad de Lima para determinar si el sistema de alimentación impartido a los jóvenes contribuía con la ganancia de peso. La nutricionista del mismo afirma que el peso medio de los 1000 jóvenes recluidos es de 127,8 libras con una varianza es de 8,81 lb^2. Examinada una muestra de 50 jóvenes se obtiene un peso promedio de 115 libras con una desviación estándar de 11,02 lb. Al nivel de confianza del 95%, se pueden aceptar las afirmaciones de la nutricionista?

3. Un ingeniero procesal midió el espesor de 25 paredes de las celdas (calabozos) donde se encuentran los presos con el objeto de encontrar alguna alteración. La media muestral fue de 20,55 cm y la desviación estándar muestral fue de 1,08 cm. Suponga que es importante demostrar que el espesor de las paredes de las celdas excede 20,0 cm con una varianza menor de 1,0 cm^2. Formule y pruebe las hipótesis apropiadas y concluya con $\alpha=0,05$.

4. Un investigador afirma que al menos 10% de las manillas (esposas) utilizadas para atrapar a los ladrones presentan defectos de fabricación que potencialmente podrían causar lesiones al ciudadano en la muñeca. Una muestra de 200 manillas reveló que 16 de ellas presentaban estos defectos. ¿Este descubrimiento apoya la afirmación del investigador? Asuma $\alpha=0,05$.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Box G., Hunter S. y Hunter W. (2008). *Estadística para investigadores*. Diseño, Innovación y Descubrimientos. Editorial Reverte

Canavos, G. (1988). *Probabilidad y Estadística*. Primera edición. Naucalpan de Juárez, México, Editorial McGraw Hill. 651 p.

Christensen H. (2008). *Estadística paso a paso*. Editorial Trillas.

García J., Mina J., Torres F., Burbano M. y Yambay W. (2017). *Evaluación sensorial y metodologías para su análisis*. Comisión de Publicaciones UPEC Tulcán. 247 p.

González M. y Pérez A. (2009). *Estadística Aplicada*. *Una Visión instrumental*. Editorial Díaz de Santos.

Johnson R y Kuby P. (2012). *Estadística elemental*. 11ª edición. Cencage Learning.

Johnson R. (2012). Estadística Elemental. Editorial Trillas.

Sarmiento B. y Fernandez E. (2013). Estadística Descriptiva. Introducción al análisis de datos.

ANEXO 1
DISTRIBUCIONES DE MUESTREO

Distribución de Muestreo de la Media Aritmética

Uno de los estadísticos más importantes es la media de un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Formalmente:

Sea X_1, X_2, …, X_n una muestra aleatoria que consiste de n variables aleatorias IID tales que $E(X_i)=$ y la $V(X_i)=$ ^{2} para toda i=1, 2, …, n. Entonces el estadístico

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Se define como la media de las n variables IID o media muestral.

$$E(\bar{X}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu \quad \Rightarrow \quad E(\bar{X}) = \mu$$

La varianza:

$$V(\bar{X}) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

El **error estándar** de la media o **desviación estándar** de la media es:

$$d.e.(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Nótese que conforme el tamaño de la muestra crece, la desviación estándar, y de esta manera la variabilidad de la media muestral, disminuye. En otras palabras, si el tamaño de la muestra crece, la precisión de la media muestral para estimar la media poblacional aumenta.

¿Pero cuál es la distribución de la media muestral?

Sea X_1, X_2, …, X_n una muestra aleatoria que consiste de n variables aleatorias ***independientes y normalmente distribuidas*** *con media $E(X_i)=\mu$ y varianza $V(X_i)=\sigma^2$ para toda i=1, 2, …, n. Entonces la distribución de la media muestral es normal con media*

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$\text{y varianza } V(\bar{X}) = \sigma^2/n$$

Es decir que,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

De esta forma la función de densidad de probabilidad de la media muestral cuando se muestrea una población cuya distribución es **normal** está dada por

$$f\left(\bar{X};\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right]^2}, \qquad -\infty<\bar{X}<+\infty$$

La estandarización de la media en Z también sigue una distribución normal (0,1)

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{\sigma}$$

De lo anterior tenemos que la distribución de muestreo de la media muestral es normal cuando éste se lleva a cabo a partir de una población que tiene una distribución normal con y conocidos.

Para un valor grande de n, la distribución de la media muestral es aproximadamente normal. De hecho, no importa el tipo de modelo de probabilidad a partir del cual se obtenga la muestra; mientras se conozca a la media y a la varianza poblacionales, la distribución de muestreo de la media muestral se encontrará aproximada por

$$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Y la estandarización de la media en Z también sigue una distribución normal (0,1). Lo anterior constituye uno de los más importantes teoremas de inferencia estadística, y se conoce como **TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE**.

Sea X_1, X_2, …, X_n una muestra aleatoria que consiste de n variables aleatorias IID con distribución de probabilidad no especificada y que tiene una $E(Xi)=\mu$ y $V(Xi)=\sigma^2$ finita. El promedio muestral tiene una distribución con media μ y varianza σ^2/n que tiende hacia una distribución normal conforme n tiende a infinito. En otras palabras,

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{\sigma}$$

Tiene como límite una distribución normal estándar con media 0 y varianza 1.

Distribución de Muestreo de la varianza muestral S^2 cuando proviene de una población con distribución normal

Otro estadístico importante utilizado para formular inferencias con respecto a la población es la **varianza muestral** denotada por $\mathbf{S^2}$

El significado de $\mathbf{S^2}$ para formular inferencias de ^{2} es comparable con el que tiene $\bar{X}$ para formular inferencias con respecto a μ.

Para desarrollar la distribución de muestreo de $\mathbf{S^2}$ cuando éste se lleva a cabo sobre una **población que tiene una distribución normal** es necesario suponer que μ es conocida y σ^2 no.

Así $\mathbf{S^2}$ se encuentra definida por

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu\right)^2}{n}$$

En donde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria de una distribución normal con media conocida y varianza σ^2 desconocida.

Para determinar una distribución de muestreo que permita hacer inferencias sobre σ^2 con base en S^2 se enuncia el siguiente teorema:

*Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. La distribución de la variable aleatoria **Y*** Es del tipo **chi-cuadrada (χ^2)** con <u>**n**</u> grados de libertad.

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu\right)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i\right)^2$$

Pero, desde un punto de vista práctico la varianza muestral $\mathbf{S^2}$ tal y como se presenta en la ecuación

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu\right)^2}{n}$$

tiene poco uso, ya que es muy raro que se conozca el valor de la media poblacional μ. De acuerdo tenemos que es más factible emplear la siguiente ecuación para estimar σ^2.

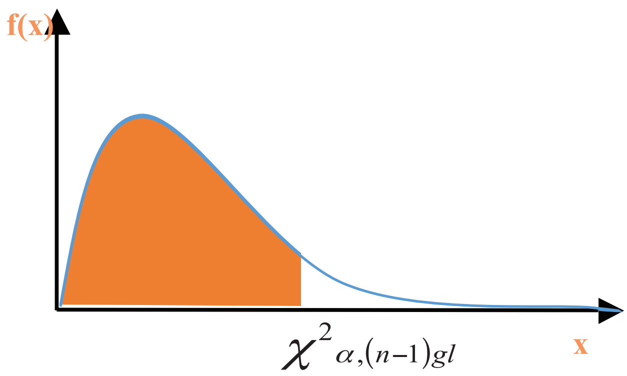
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

La distribución de muestreo de

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2 \textbf{ con (n-1)gl}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

La forma de la distribución de $\mathbf{S^2} \sim \chi^2$ **con (n-1) gl**:



Distribución de Muestreo de la Media Aritmética cuando proviene de una población con distribución normal y con varianza desconocida

Recordemos que cuando se muestrea una distribución normal con σ conocida

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

La poca factibilidad de conocer σ nos lleva al camino lógico de reemplazar por **S** que es el valor de la desviación estándar muestral.

Desafortunadamente

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \quad \text{no se distribuye de forma N(0,1)}$$

Sin embargo, es posible determinar la distribución de muestreo exacta de

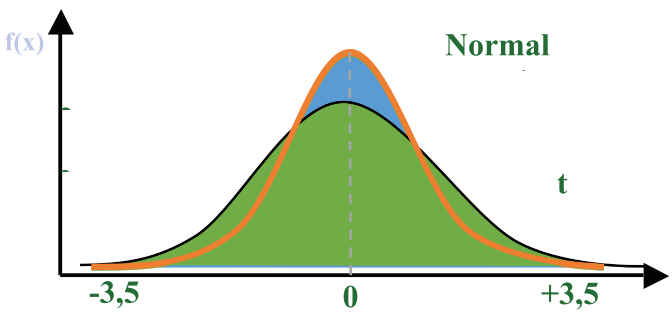
$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \;???$$

Cuando se muestrea una **población normal** con σ **desconocida**.

Suponga que realiza un experimento en que se observan dos variables aleatorias X y Z, donde X~ χ^2 con v grados de libertad y Z ~ **N(0,1)**. Sea T otra variable aleatoria que es función de X y Z, tal que:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{v}}}$$

Donde T es una variable aleatoria de **t de Student** con **v** grados de libertad. La forma de la distribución de **t de Student**:



$$E(T) = 0 \qquad V(T) = \frac{v}{v-2}$$

Conforme n se hace grande la distribución de T tiende a la distribución Normal estándar (Z).

Volviendo a la definición de T y utilizando

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \text{y} \quad X \quad \frac{(n-1)S}{\sigma} \sim \chi \;(n-1)gl$$

Quedando:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{v}}} = \frac{\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}$$

Por lo que:

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \text{T Student (n-1) gl}$$

Distribución de Muestreo de la razón de dos varianzas a partir de distribuciones normales

Dos variables aleatorias independientes Y y W, cada una con una distribución de Ji cuadrado con v_1 y v_2 grados de libertad respectivamente, entonces

$$F = \frac{Y/v_1}{W/v_2} \sim F_{\text{Snedecor}\,(1-\alpha)\,(v_1,\, v_2)}$$

Esta distribución es asimétrica positiva pero a medida que v_1 y v_2 se hacen grandes esta asimetría disminuye. Cuando se obtienen los valores de s_Y^2 y s_W^2 a partir de muestras extraídas de dos poblaciones normales e independientes se calcula F.

$$F = \frac{s_Y^2/\sigma_Y^2}{s_W^2/\sigma_W^2} = \frac{s_Y^2}{s_W^2} \sim F_{\text{Snedecor}\,(1-\alpha)\,(n_{Y-1},\, n_{W-1})}$$

Este valor de F sirve para verificar la validez de la suposición de la igualdad de varianzas $\sigma_Y^2 = \sigma_W^2$, ya que si las dos varianzas son iguales la probabilidad de observar un valor de F distinto de 1, de manera suficiente, debe ser pequeña.

En la tabla correspondiente a la distribución de F se encuentran los valores de F $\text{Snedecor}_{1-\alpha}$ tales para las probabilidades acumuladas seleccionadas $1-\alpha$ y distintas combinaciones de los grados de libertad del numerador v_1 y del denominador v_2.

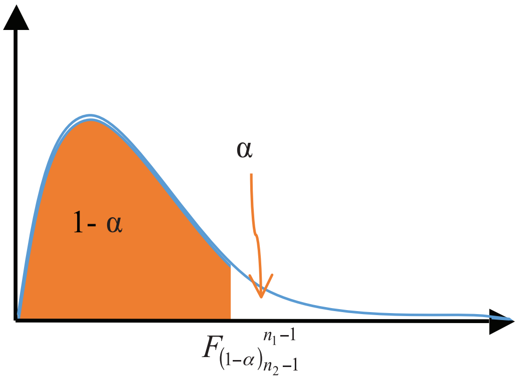
Por ejemplo, si $v_1=5$ y $v_2=10$:

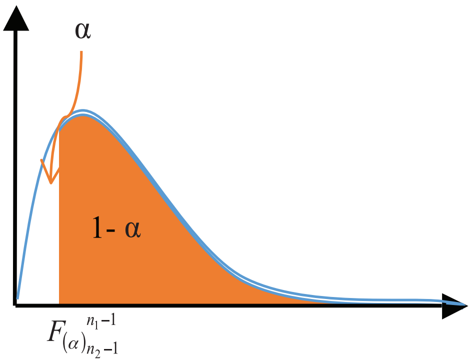
$$P\left(F \le F_{(0,90)}{}^{5}_{10}\right) = P\left(F \le 2{,}52\right) = 0{,}90$$

$$P\left(F \le F_{(0,95)}{}^{5}_{10}\right) = P\left(F \le 3{,}33\right) = 0{,}95$$

$$P\left(F \le F_{(0,99)}{}^{5}_{10}\right) = P\left(F \le 5{,}64\right) = 0{,}99$$

Las tablas solo permiten obtener valores de F cuya área a la izquierda sea igual a 90%,95%, y 99% respectivamente, es decir a la derecha iguales a 10%, 5% y 1%.





La solución se consigue debido a la siguiente propiedad de la distribución

$$F_{(\alpha)_{n_2-1}}^{n_1-1} = \frac{1}{F_{(1-\alpha)_{n_1-1}}^{n_2-1}}$$

ANEXO 2

TABLAS ESTADÍSTICAS

TABLA A	Valores de la Distribución Acumulativa Binomial
TABLA B	Valores de la Distribución Acumulativa de Poisson
TABLA C	Valores de la distribución acumulativa normal estándar
TABLA D	Valores de cuantiles de la Distribución t de Student
TABLA E	Valores de cuantiles de la Distribución Chi cuadrada
TABLA F	Valores de cuantiles de la Distribución F

Tablas tomadas de:

Canavos, G. (1988) Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y métodos. McGraw-Hill, México.

TABLA A. Valores de la distribución acumulativa binomial

$P(X \leq x) = F(x, n; p)$

		p																				
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
2	**0**	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500	0,2025	0,1600	0,1225	0,0900	0,0625	0,0400	0,0225	0,0100	0,0025	0,0001
	1	0,9999	0,9975	0,9900	0,9775	0,9600	0,9375	0,9100	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500	0,6975	0,6400	0,5775	0,5100	0,4375	0,3600	0,2775	0,1900	0,0975	0,0199
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		p																				
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
3	**0**	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250	0,0911	0,0640	0,0429	0,0270	0,0156	0,0080	0,0034	0,0010	0,0001	0,0000
	1	0,9997	0,9928	0,9720	0,9393	0,8960	0,8438	0,7840	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000	0,4253	0,3520	0,2818	0,2160	0,1563	0,1040	0,0607	0,0280	0,0072	0,0003
	2	1,0000	0,9999	0,9990	0,9966	0,9920	0,9844	0,9730	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750	0,8336	0,7840	0,7254	0,6570	0,5781	0,4880	0,3859	0,2710	0,1426	0,0297
	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		p																				
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
4	**0**	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625	0,0410	0,0256	0,0150	0,0081	0,0039	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,9994	0,9860	0,9477	0,8905	0,8192	0,7383	0,6517	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125	0,2415	0,1792	0,1265	0,0837	0,0508	0,0272	0,0120	0,0037	0,0005	0,0000
	2	1,0000	0,9995	0,9963	0,9880	0,9728	0,9492	0,9163	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875	0,6090	0,5248	0,4370	0,3483	0,2617	0,1808	0,1095	0,0523	0,0140	0,0006
	3	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9961	0,9919	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375	0,9085	0,8704	0,8215	0,7599	0,6836	0,5904	0,4780	0,3439	0,1855	0,0394
	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
		p																				
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
5	**0**	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313	0,0185	0,0102	0,0053	0,0024	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9990	0,9774	0,9185	0,8352	0,7373	0,6328	0,5282	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875	0,1312	0,0870	0,0540	0,0308	0,0156	0,0067	0,0022	0,0005	0,0000	0,0000
	2	1,0000	0,9988	0,9914	0,9734	0,9421	0,8965	0,8369	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000	0,4069	0,3174	0,2352	0,1631	0,1035	0,0579	0,0266	0,0086	0,0012	0,0000
	3	1,0000	1,0000	0,9995	0,9978	0,9933	0,9844	0,9692	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125	0,7438	0,6630	0,5716	0,4718	0,3672	0,2627	0,1648	0,0815	0,0226	0,0010
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9976	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688	0,9497	0,9222	0,8840	0,8319	0,7627	0,6723	0,5563	0,4095	0,2262	0,0490
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	x	p: 0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156	0,0083	0,0041	0,0018	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9985	0,9672	0,8857	0,7765	0,6554	0,5339	0,4202	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094	0,0692	0,0410	0,0223	0,0109	0,0046	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	2	1,0000	0,9978	0,9842	0,9527	0,9011	0,8306	0,7443	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438	0,2553	0,1792	0,1174	0,0705	0,0376	0,0170	0,0059	0,0013	0,0001	0,0000
	3	1,0000	0,9999	0,9987	0,9941	0,9830	0,9624	0,9295	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563	0,5585	0,4557	0,3529	0,2557	0,1694	0,0989	0,0473	0,0158	0,0022	0,0000
	4	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9954	0,9891	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906	0,8364	0,7667	0,6809	0,5798	0,4661	0,3446	0,2235	0,1143	0,0328	0,0015
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844	0,9723	0,9533	0,9246	0,8824	0,8220	0,7379	0,6229	0,4686	0,2649	0,0585
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	x	p: 0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078	0,0037	0,0016	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9980	0,9556	0,8503	0,7166	0,5767	0,4449	0,3294	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625	0,0357	0,0188	0,0090	0,0038	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	1,0000	0,9962	0,9743	0,9262	0,8520	0,7564	0,6471	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266	0,1529	0,0963	0,0556	0,0288	0,0129	0,0047	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9998	0,9973	0,9879	0,9667	0,9294	0,8740	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000	0,3917	0,2898	0,1998	0,1260	0,0706	0,0333	0,0121	0,0027	0,0002	0,0000
	4	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9953	0,9871	0,9712	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734	0,6836	0,5801	0,4677	0,3529	0,2436	0,1480	0,0738	0,0257	0,0038	0,0000
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9962	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375	0,8976	0,8414	0,7662	0,6706	0,5551	0,4233	0,2834	0,1497	0,0444	0,0020
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922	0,9848	0,9720	0,9510	0,9176	0,8665	0,7903	0,6794	0,5217	0,3017	0,0679
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	x	p: 0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039	0,0017	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9973	0,9428	0,8131	0,6572	0,5033	0,3671	0,2553	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352	0,0181	0,0085	0,0036	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9999	0,9942	0,9619	0,8948	0,7969	0,6785	0,5518	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445	0,0885	0,0498	0,0253	0,0113	0,0042	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9996	0,9950	0,9786	0,9437	0,8862	0,8059	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633	0,2604	0,1737	0,1061	0,0580	0,0273	0,0104	0,0029	0,0004	0,0000	0,0000
	4	1,0000	1,0000	0,9996	0,9971	0,9896	0,9727	0,9420	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367	0,5230	0,4059	0,2936	0,1941	0,1138	0,0563	0,0214	0,0050	0,0004	0,0000
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9958	0,9887	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555	0,7799	0,6846	0,5722	0,4482	0,3215	0,2031	0,1052	0,0381	0,0058	0,0001
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648	0,9368	0,8936	0,8309	0,7447	0,6329	0,4967	0,3428	0,1869	0,0572	0,0027
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961	0,9916	0,9832	0,9681	0,9424	0,8999	0,8322	0,7275	0,5695	0,3366	0,0773
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		p																				
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020	0,0008	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9966	0,9288	0,7748	0,5995	0,4362	0,3003	0,1960	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195	0,0091	0,0038	0,0014	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9999	0,9916	0,9470	0,8591	0,7382	0,6007	0,4628	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898	0,0498	0,0250	0,0112	0,0043	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9994	0,9917	0,9661	0,9144	0,8343	0,7297	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539	0,1658	0,0994	0,0536	0,0253	0,0100	0,0031	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000
	4	1,0000	1,0000	0,9991	0,9944	0,9804	0,9511	0,9012	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000	0,3786	0,2666	0,1717	0,0988	0,0489	0,0196	0,0056	0,0009	0,0000	0,0000
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9969	0,9900	0,9747	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461	0,6386	0,5174	0,3911	0,2703	0,1657	0,0856	0,0339	0,0083	0,0006	0,0000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102	0,8505	0,7682	0,6627	0,5372	0,3993	0,2618	0,1409	0,0530	0,0084	0,0001
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805	0,9615	0,9295	0,8789	0,8040	0,6997	0,5638	0,4005	0,2252	0,0712	0,0034
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980	0,9954	0,9899	0,9793	0,9596	0,9249	0,8658	0,7684	0,6126	0,3698	0,0865
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		p																				
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107	0,0045	0,0017	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547	0,0274	0,0123	0,0048	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719	0,1020	0,0548	0,0260	0,0106	0,0035	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770	0,2616	0,1662	0,0949	0,0473	0,0197	0,0064	0,0014	0,0001	0,0000	0,0000
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230	0,4956	0,3669	0,2485	0,1503	0,0781	0,0328	0,0099	0,0016	0,0001	0,0000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281	0,7340	0,6177	0,4862	0,3504	0,2241	0,1209	0,0500	0,0128	0,0010	0,0000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453	0,9004	0,8327	0,7384	0,6172	0,4744	0,3222	0,1798	0,0702	0,0115	0,0001
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893	0,9767	0,9536	0,9140	0,8507	0,7560	0,6242	0,4557	0,2639	0,0861	0,0043
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9975	0,9940	0,9865	0,9718	0,9437	0,8926	0,8031	0,6513	0,4013	0,0956
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		p																				
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
11	0	0,8953	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9948	0,8981	0,6974	0,4922	0,3221	0,1971	0,1130	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059	0,0022	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	2	0,9998	0,9848	0,9104	0,7788	0,6174	0,4552	0,3127	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327	0,0148	0,0059	0,0020	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9984	0,9815	0,9306	0,8389	0,7133	0,5696	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133	0,0610	0,0293	0,0122	0,0043	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9999	0,9972	0,9841	0,9496	0,8854	0,7897	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744	0,1738	0,0994	0,0501	0,0216	0,0076	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	1,0000	0,9997	0,9973	0,9883	0,9657	0,9218	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000	0,3669	0,2465	0,1487	0,0782	0,0343	0,0117	0,0027	0,0003	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9924	0,9784	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256	0,6029	0,4672	0,3317	0,2103	0,1146	0,0504	0,0159	0,0028	0,0001	0,0000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867	0,8089	0,7037	0,5744	0,4304	0,2867	0,1611	0,0694	0,0185	0,0016	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673	0,9348	0,8811	0,7999	0,6873	0,5448	0,3826	0,2212	0,0896	0,0152	0,0002
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941	0,9861	0,9698	0,9394	0,8870	0,8029	0,6779	0,5078	0,3026	0,1019	0,0052
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9986	0,9964	0,9912	0,9802	0,9578	0,9141	0,8327	0,6862	0,4312	0,1047
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

												p										
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
12	**0**	0,8864	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9938	0,8816	0,6590	0,4435	0,2749	0,1584	0,0850	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9998	0,9804	0,8891	0,7358	0,5583	0,3907	0,2528	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193	0,0079	0,0028	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9978	0,9744	0,9078	0,7946	0,6488	0,4925	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730	0,0356	0,0153	0,0056	0,0017	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9998	0,9957	0,9761	0,9274	0,8424	0,7237	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938	0,1117	0,0573	0,0255	0,0095	0,0028	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	1,0000	0,9995	0,9954	0,9806	0,9456	0,8822	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872	0,2607	0,1582	0,0846	0,0386	0,0143	0,0039	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9961	0,9857	0,9614	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128	0,4731	0,3348	0,2127	0,1178	0,0544	0,0194	0,0046	0,0005	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9972	0,9905	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062	0,6956	0,5618	0,4167	0,2763	0,1576	0,0726	0,0239	0,0043	0,0002	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270	0,8655	0,7747	0,6533	0,5075	0,3512	0,2054	0,0922	0,0256	0,0022	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807	0,9579	0,9166	0,8487	0,7472	0,6093	0,4417	0,2642	0,1109	0,0196	0,0002
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968	0,9917	0,9804	0,9576	0,9150	0,8416	0,7251	0,5565	0,3410	0,1184	0,0062
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9992	0,9978	0,9943	0,9862	0,9683	0,9313	0,8578	0,7176	0,4596	0,1136
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

												p										
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
13	**0**	0,8775	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9928	0,8646	0,6213	0,3983	0,2336	0,1267	0,0637	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9997	0,9755	0,8661	0,6920	0,5017	0,3326	0,2025	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112	0,0041	0,0013	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	3	1,0000	0,9969	0,9658	0,8820	0,7473	0,5843	0,4206	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461	0,0203	0,0078	0,0025	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9997	0,9935	0,9658	0,9009	0,7940	0,6543	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334	0,0698	0,0321	0,0126	0,0040	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	1,0000	0,9991	0,9925	0,9700	0,9198	0,8346	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905	0,1788	0,0977	0,0462	0,0182	0,0056	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9930	0,9757	0,9376	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000	0,3563	0,2288	0,1295	0,0624	0,0243	0,0070	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9944	0,9818	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095	0,5732	0,4256	0,2841	0,1654	0,0802	0,0300	0,0075	0,0009	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666	0,7721	0,6470	0,4995	0,3457	0,2060	0,0991	0,0342	0,0065	0,0003	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539	0,9071	0,8314	0,7217	0,5794	0,4157	0,2527	0,1180	0,0342	0,0031	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888	0,9731	0,9421	0,8868	0,7975	0,6674	0,4983	0,3080	0,1339	0,0245	0,0003
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9951	0,9874	0,9704	0,9363	0,8733	0,7664	0,6017	0,3787	0,1354	0,0072
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9963	0,9903	0,9762	0,9450	0,8791	0,7458	0,4867	0,1225
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

												p										
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
14	**0**	0,8687	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9916	0,8470	0,5846	0,3567	0,1979	0,1010	0,0475	0,0205	0,0081	0,0029	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9997	0,9699	0,8416	0,6479	0,4481	0,2811	0,1608	0,0839	0,0398	0,0170	0,0065	0,0022	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9958	0,9559	0,8535	0,6982	0,5213	0,3552	0,2205	0,1243	0,0632	0,0287	0,0114	0,0039	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9996	0,9908	0,9533	0,8702	0,7415	0,5842	0,4227	0,2793	0,1672	0,0898	0,0426	0,0175	0,0060	0,0017	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	1,0000	0,9985	0,9885	0,9561	0,8883	0,7805	0,6405	0,4859	0,3373	0,2120	0,1189	0,0583	0,0243	0,0083	0,0022	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9884	0,9617	0,9067	0,8164	0,6925	0,5461	0,3953	0,2586	0,1501	0,0753	0,0315	0,0103	0,0024	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9976	0,9897	0,9685	0,9247	0,8499	0,7414	0,6047	0,4539	0,3075	0,1836	0,0933	0,0383	0,0116	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9978	0,9917	0,9757	0,9417	0,8811	0,7880	0,6627	0,5141	0,3595	0,2195	0,1117	0,0439	0,0115	0,0015	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9983	0,9940	0,9825	0,9574	0,9102	0,8328	0,7207	0,5773	0,4158	0,2585	0,1298	0,0467	0,0092	0,0004	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9989	0,9961	0,9886	0,9713	0,9368	0,8757	0,7795	0,6448	0,4787	0,3018	0,1465	0,0441	0,0042	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9978	0,9935	0,9830	0,9602	0,9161	0,8392	0,7189	0,5519	0,3521	0,1584	0,0301	0,0003
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9971	0,9919	0,9795	0,9525	0,8990	0,8021	0,6433	0,4154	0,1530	0,0084
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9992	0,9976	0,9932	0,9822	0,9560	0,8972	0,7712	0,5123	0,1313
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		p																				
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
15	0	0,8601	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9904	0,8290	0,5490	0,3186	0,1671	0,0802	0,0353	0,0142	0,0052	0,0017	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9996	0,9638	0,8159	0,6042	0,3980	0,2361	0,1268	0,0617	0,0271	0,0107	0,0037	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9945	0,9444	0,8227	0,6482	0,4613	0,2969	0,1727	0,0905	0,0424	0,0176	0,0063	0,0019	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9994	0,9873	0,9383	0,8358	0,6865	0,5155	0,3519	0,2173	0,1204	0,0592	0,0255	0,0093	0,0028	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9999	0,9978	0,9832	0,9389	0,8516	0,7216	0,5643	0,4032	0,2608	0,1509	0,0769	0,0338	0,0124	0,0037	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9997	0,9964	0,9819	0,9434	0,8689	0,7548	0,6098	0,4522	0,3036	0,1818	0,0950	0,0422	0,0152	0,0042	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9958	0,9827	0,9500	0,8868	0,7869	0,6535	0,5000	0,3465	0,2131	0,1132	0,0500	0,0173	0,0042	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9958	0,9848	0,9578	0,9050	0,8182	0,6964	0,5478	0,3902	0,2452	0,1311	0,0566	0,0181	0,0036	0,0003	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9876	0,9662	0,9231	0,8491	0,7392	0,5968	0,4357	0,2784	0,1484	0,0611	0,0168	0,0022	0,0001	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9972	0,9907	0,9745	0,9408	0,8796	0,7827	0,6481	0,4845	0,3135	0,1642	0,0617	0,0127	0,0006	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9937	0,9824	0,9576	0,9095	0,8273	0,7031	0,5387	0,3518	0,1773	0,0556	0,0055	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9963	0,9893	0,9729	0,9383	0,8732	0,7639	0,6020	0,3958	0,1841	0,0362	0,0004
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9948	0,9858	0,9647	0,9198	0,8329	0,6814	0,4510	0,1710	0,0096
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9953	0,9866	0,9648	0,9126	0,7941	0,5367	0,1399
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		p																				
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
16	0	0,8515	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9891	0,8108	0,5147	0,2839	0,1407	0,0635	0,0261	0,0098	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9995	0,9571	0,7892	0,5614	0,3518	0,1971	0,0994	0,0451	0,0183	0,0066	0,0021	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9930	0,9316	0,7899	0,5981	0,4050	0,2459	0,1339	0,0651	0,0281	0,0106	0,0035	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9991	0,9830	0,9209	0,7982	0,6302	0,4499	0,2892	0,1666	0,0853	0,0384	0,0149	0,0049	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9999	0,9967	0,9765	0,9183	0,8103	0,6598	0,4900	0,3288	0,1976	0,1051	0,0486	0,0191	0,0062	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9733	0,9204	0,8247	0,6881	0,5272	0,3660	0,2272	0,1241	0,0583	0,0229	0,0071	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9989	0,9930	0,9729	0,9256	0,8406	0,7161	0,5629	0,4018	0,2559	0,1423	0,0671	0,0257	0,0075	0,0015	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9985	0,9925	0,9743	0,9329	0,8577	0,7441	0,5982	0,4371	0,2839	0,1594	0,0744	0,0271	0,0070	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9984	0,9929	0,9771	0,9417	0,8759	0,7728	0,6340	0,4728	0,3119	0,1753	0,0796	0,0267	0,0056	0,0005	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9938	0,9809	0,9514	0,8949	0,8024	0,6712	0,5100	0,3402	0,1897	0,0817	0,0235	0,0033	0,0001	0,0000

n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9851	0,9616	0,9147	0,8334	0,7108	0,5501	0,3698	0,2018	0,0791	0,0170	0,0009	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9991	0,9965	0,9894	0,9719	0,9349	0,8661	0,7541	0,5950	0,4019	0,2101	0,0684	0,0070	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9979	0,9934	0,9817	0,9549	0,9006	0,8029	0,6482	0,4386	0,2108	0,0429	0,0005
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9967	0,9902	0,9739	0,9365	0,8593	0,7161	0,4853	0,1892	0,0109
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9967	0,9900	0,9719	0,9257	0,8147	0,5599	0,1485
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

												p										
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
17	0	0,8429	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9877	0,7922	0,4818	0,2525	0,1182	0,0501	0,0193	0,0067	0,0021	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9994	0,9497	0,7618	0,5198	0,3096	0,1637	0,0774	0,0327	0,0123	0,0041	0,0012	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9912	0,9174	0,7556	0,5489	0,3530	0,2019	0,1028	0,0464	0,0184	0,0064	0,0019	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9988	0,9779	0,9013	0,7582	0,5739	0,3887	0,2348	0,1260	0,0596	0,0245	0,0086	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9999	0,9953	0,9681	0,8943	0,7653	0,5968	0,4197	0,2639	0,1471	0,0717	0,0301	0,0106	0,0030	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9992	0,9917	0,9623	0,8929	0,7752	0,6188	0,4478	0,2902	0,1662	0,0826	0,0348	0,0120	0,0032	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9891	0,9598	0,8954	0,7872	0,6405	0,4743	0,3145	0,1834	0,0919	0,0383	0,0127	0,0031	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9974	0,9876	0,9597	0,9006	0,8011	0,6626	0,5000	0,3374	0,1989	0,0994	0,0403	0,0124	0,0026	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9969	0,9873	0,9617	0,9081	0,8166	0,6855	0,5257	0,3595	0,2128	0,1046	0,0402	0,0109	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9968	0,9880	0,9652	0,9174	0,8338	0,7098	0,5522	0,3812	0,2248	0,1071	0,0377	0,0083	0,0008	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9970	0,9894	0,9699	0,9283	0,8529	0,7361	0,5803	0,4032	0,2347	0,1057	0,0319	0,0047	0,0001	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9975	0,9914	0,9755	0,9404	0,8740	0,7652	0,6113	0,4261	0,2418	0,0987	0,0221	0,0012	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9936	0,9816	0,9536	0,8972	0,7981	0,6470	0,4511	0,2444	0,0826	0,0088	0,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9988	0,9959	0,9877	0,9673	0,9226	0,8363	0,6904	0,4802	0,2382	0,0503	0,0006
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9979	0,9933	0,9807	0,9499	0,8818	0,7475	0,5182	0,2078	0,0123
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9977	0,9925	0,9775	0,9369	0,8332	0,5819	0,1571
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

												p										
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
18	0	0,8345	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9862	0,7735	0,4503	0,2241	0,0991	0,0395	0,0142	0,0046	0,0013	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	2	0,9993	0,9419	0,7338	0,4797	0,2713	0,1353	0,0600	0,0236	0,0082	0,0025	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9891	0,9018	0,7202	0,5010	0,3057	0,1646	0,0783	0,0328	0,0120	0,0038	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9985	0,9718	0,8794	0,7164	0,5187	0,3327	0,1886	0,0942	0,0411	0,0154	0,0049	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9998	0,9936	0,9581	0,8671	0,7175	0,5344	0,3550	0,2088	0,1077	0,0481	0,0183	0,0058	0,0014	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9988	0,9882	0,9487	0,8610	0,7217	0,5491	0,3743	0,2258	0,1189	0,0537	0,0203	0,0062	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9998	0,9973	0,9837	0,9431	0,8593	0,7283	0,5634	0,3915	0,2403	0,1280	0,0576	0,0212	0,0061	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9957	0,9807	0,9404	0,8609	0,7368	0,5778	0,4073	0,2527	0,1347	0,0597	0,0210	0,0054	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9946	0,9790	0,9403	0,8653	0,7473	0,5927	0,4222	0,2632	0,1391	0,0596	0,0193	0,0043	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9939	0,9788	0,9424	0,8720	0,7597	0,6085	0,4366	0,2717	0,1407	0,0569	0,0163	0,0027	0,0002	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9938	0,9797	0,9463	0,8811	0,7742	0,6257	0,4509	0,2783	0,1390	0,0513	0,0118	0,0012	0,0000	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9986	0,9942	0,9817	0,9519	0,8923	0,7912	0,6450	0,4656	0,2825	0,1329	0,0419	0,0064	0,0002	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9846	0,9589	0,9058	0,8114	0,6673	0,4813	0,2836	0,1206	0,0282	0,0015	0,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9962	0,9880	0,9672	0,9217	0,8354	0,6943	0,4990	0,2798	0,0982	0,0109	0,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9975	0,9918	0,9764	0,9400	0,8647	0,7287	0,5203	0,2662	0,0581	0,0007
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9987	0,9954	0,9858	0,9605	0,9009	0,7759	0,5497	0,2265	0,0138
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9944	0,9820	0,9464	0,8499	0,6028	0,1655
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

												p										
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
19	**0**	0,8262	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9847	0,7547	0,4203	0,1985	0,0829	0,0310	0,0104	0,0031	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9991	0,9335	0,7054	0,4413	0,2369	0,1113	0,0462	0,0170	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9868	0,8850	0,6841	0,4551	0,2631	0,1332	0,0591	0,0230	0,0077	0,0022	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9980	0,9648	0,8556	0,6733	0,4654	0,2822	0,1500	0,0696	0,0280	0,0096	0,0028	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9998	0,9914	0,9463	0,8369	0,6678	0,4739	0,2968	0,1629	0,0777	0,0318	0,0109	0,0031	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9983	0,9837	0,9324	0,8251	0,6655	0,4812	0,3081	0,1727	0,0835	0,0342	0,0116	0,0031	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9997	0,9959	0,9767	0,9225	0,8180	0,6656	0,4878	0,3169	0,1796	0,0871	0,0352	0,0114	0,0028	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9933	0,9713	0,9161	0,8145	0,6675	0,4940	0,3238	0,1841	0,0885	0,0347	0,0105	0,0023	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9911	0,9674	0,9125	0,8139	0,6710	0,5000	0,3290	0,1861	0,0875	0,0326	0,0089	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9977	0,9895	0,9653	0,9115	0,8159	0,6762	0,5060	0,3325	0,1855	0,0839	0,0287	0,0067	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9972	0,9886	0,9648	0,9129	0,8204	0,6831	0,5122	0,3344	0,1820	0,0775	0,0233	0,0041	0,0003	0,0000	0,0000

	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9969	0,9884	0,9658	0,9165	0,8273	0,6919	0,5188	0,3345	0,1749	0,0676	0,0163	0,0017	0,0000	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9969	0,9891	0,9682	0,9223	0,8371	0,7032	0,5261	0,3322	0,1631	0,0537	0,0086	0,0002	0,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9972	0,9904	0,9720	0,9304	0,8500	0,7178	0,5346	0,3267	0,1444	0,0352	0,0020	0,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9978	0,9923	0,9770	0,9409	0,8668	0,7369	0,5449	0,3159	0,1150	0,0132	0,0000
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9985	0,9945	0,9830	0,9538	0,8887	0,7631	0,5587	0,2946	0,0665	0,0009
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9969	0,9896	0,9690	0,9171	0,8015	0,5797	0,2453	0,0153
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9958	0,9856	0,9544	0,8649	0,6226	0,1738
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

											p										
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
20	**0**	0,8179	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9831	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9990	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207	0,0064	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577	0,0214	0,0065	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316	0,0580	0,0210	0,0060	0,0013	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517	0,1308	0,0565	0,0196	0,0051	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119	0,2493	0,1275	0,0532	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881	0,4086	0,2447	0,1218	0,0480	0,0139	0,0026	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483	0,5857	0,4044	0,2376	0,1133	0,0409	0,0100	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684	0,7480	0,5841	0,3990	0,2277	0,1018	0,0321	0,0059	0,0004	0,0000	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423	0,8701	0,7500	0,5834	0,3920	0,2142	0,0867	0,0219	0,0024	0,0000	0,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793	0,9447	0,8744	0,7546	0,5836	0,3828	0,1958	0,0673	0,0113	0,0003	0,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941	0,9811	0,9490	0,8818	0,7625	0,5852	0,3704	0,1702	0,0432	0,0026	0,0000
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9840	0,9556	0,8929	0,7748	0,5886	0,3523	0,1330	0,0159	0,0000
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9991	0,9964	0,9879	0,9645	0,9087	0,7939	0,5951	0,3231	0,0755	0,0010
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9979	0,9924	0,9757	0,9308	0,8244	0,6083	0,2642	0,0169
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9968	0,9885	0,9612	0,8784	0,6415	0,1821
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		p																				
n	**x**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
25	**0**	0,7778	0,2774	0,0718	0,0172	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9742	0,6424	0,2712	0,0931	0,0274	0,0070	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9980	0,8729	0,5371	0,2537	0,0982	0,0321	0,0090	0,0021	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9999	0,9659	0,7636	0,4711	0,2340	0,0962	0,0332	0,0097	0,0024	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	1,0000	0,9928	0,9020	0,6821	0,4207	0,2137	0,0905	0,0320	0,0095	0,0023	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9988	0,9666	0,8385	0,6167	0,3783	0,1935	0,0826	0,0294	0,0086	0,0020	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9998	0,9905	0,9305	0,7800	0,5611	0,3407	0,1734	0,0736	0,0258	0,0073	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9977	0,9745	0,8909	0,7265	0,5118	0,3061	0,1536	0,0639	0,0216	0,0058	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9995	0,9920	0,9532	0,8506	0,6769	0,4668	0,2735	0,1340	0,0539	0,0174	0,0043	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9999	0,9979	0,9827	0,9287	0,8106	0,6303	0,4246	0,2424	0,1148	0,0440	0,0132	0,0029	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9703	0,9022	0,7712	0,5858	0,3843	0,2122	0,0960	0,0344	0,0093	0,0018	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9985	0,9893	0,9558	0,8746	0,7323	0,5426	0,3450	0,1827	0,0778	0,0255	0,0060	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,9396	0,8462	0,6937	0,5000	0,3063	0,1538	0,0604	0,0175	0,0034	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9745	0,9222	0,8173	0,6550	0,4574	0,2677	0,1254	0,0442	0,0107	0,0015	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9907	0,9656	0,9040	0,7878	0,6157	0,4142	0,2288	0,0978	0,0297	0,0056	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9971	0,9868	0,9560	0,8852	0,7576	0,5754	0,3697	0,1894	0,0713	0,0173	0,0021	0,0001	0,0000	0,0000
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9957	0,9826	0,9461	0,8660	0,7265	0,5332	0,3231	0,1494	0,0468	0,0080	0,0005	0,0000	0,0000
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9942	0,9784	0,9361	0,8464	0,6939	0,4882	0,2735	0,1091	0,0255	0,0023	0,0000	0,0000
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9927	0,9742	0,9264	0,8266	0,6593	0,4389	0,2200	0,0695	0,0095	0,0002	0,0000
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9980	0,9914	0,9706	0,9174	0,8065	0,6217	0,3833	0,1615	0,0334	0,0012	0,0000
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9977	0,9905	0,9680	0,9095	0,7863	0,5793	0,3179	0,0980	0,0072	0,0000
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9903	0,9668	0,9038	0,7660	0,5289	0,2364	0,0341	0,0001
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9979	0,9910	0,9679	0,9018	0,7463	0,4629	0,1271	0,0020
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9984	0,9930	0,9726	0,9069	0,7288	0,3576	0,0258
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9962	0,9828	0,9282	0,7226	0,2222
	25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TABLA B. Valores de la distribución acumulativa de Poisson

$P(X \leq x) = F(x;\lambda)$

	λ									
x	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	λ									
x	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,6990	0,6626	0,6268	0,5918	0,5578	0,5249	0,4932	0,4628	0,4338	0,4060
2	0,9004	0,8795	0,8571	0,8335	0,8088	0,7834	0,7572	0,7306	0,7037	0,6767
3	0,9743	0,9662	0,9569	0,9463	0,9344	0,9212	0,9068	0,8913	0,8747	0,8571
4	0,9946	0,9923	0,9893	0,9857	0,9814	0,9763	0,9704	0,9636	0,9559	0,9473
5	0,9990	0,9985	0,9978	0,9968	0,9955	0,9940	0,9920	0,9896	0,9868	0,9834
6	0,9999	0,9997	0,9996	0,9994	0,9991	0,9987	0,9981	0,9974	0,9966	0,9955
7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9994	0,9992	0,9989
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	λ									
x	**2,1**	**2,2**	**2,3**	**2,4**	**2,5**	**2,6**	**2,7**	**2,8**	**2,9**	**3,0**
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,3796	0,3546	0,3309	0,3084	0,2873	0,2674	0,2487	0,2311	0,2146	0,1991
2	0,6496	0,6227	0,5960	0,5697	0,5438	0,5184	0,4936	0,4695	0,4460	0,4232
3	0,8386	0,8194	0,7993	0,7787	0,7576	0,7360	0,7141	0,6919	0,6696	0,6472
4	0,9379	0,9275	0,9163	0,9041	0,8912	0,8774	0,8629	0,8477	0,8318	0,8153
5	0,9796	0,9751	0,9700	0,9643	0,9580	0,9510	0,9433	0,9349	0,9258	0,9161
6	0,9941	0,9925	0,9906	0,9884	0,9858	0,9828	0,9794	0,9756	0,9713	0,9665
7	0,9985	0,9980	0,9974	0,9967	0,9958	0,9947	0,9934	0,9919	0,9901	0,9881
8	0,9997	0,9995	0,9994	0,9991	0,9989	0,9985	0,9981	0,9976	0,9969	0,9962
9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9991	0,9989
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997
11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999

	λ									
x	**3,1**	**3,2**	**3,3**	**3,4**	**3,5**	**3,6**	**3,7**	**3,8**	**3,9**	**4,0**
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1847	0,1712	0,1586	0,1468	0,1359	0,1257	0,1162	0,1074	0,0992	0,0916
2	0,4012	0,3799	0,3594	0,3397	0,3208	0,3027	0,2854	0,2689	0,2531	0,2381
3	0,6248	0,6025	0,5803	0,5584	0,5366	0,5152	0,4942	0,4735	0,4533	0,4335
4	0,7982	0,7806	0,7626	0,7442	0,7254	0,7064	0,6872	0,6678	0,6484	0,6288
5	0,9057	0,8946	0,8829	0,8705	0,8576	0,8441	0,8301	0,8156	0,8006	0,7851
6	0,9612	0,9554	0,9490	0,9421	0,9347	0,9267	0,9182	0,9091	0,8995	0,8893
7	0,9858	0,9832	0,9802	0,9769	0,9733	0,9692	0,9648	0,9599	0,9546	0,9489
8	0,9953	0,9943	0,9931	0,9917	0,9901	0,9883	0,9863	0,9840	0,9815	0,9786
9	0,9986	0,9982	0,9978	0,9973	0,9967	0,9960	0,9952	0,9942	0,9931	0,9919
10	0,9996	0,9995	0,9994	0,9992	0,9990	0,9987	0,9984	0,9981	0,9977	0,9972
11	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999

	λ									
x	**4,1**	**4,2**	**4,3**	**4,4**	**4,5**	**4,6**	**4,7**	**4,8**	**4,9**	**5,0**
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0845	0,0780	0,0719	0,0663	0,0611	0,0563	0,0518	0,0477	0,0439	0,0404
2	0,2238	0,2102	0,1974	0,1851	0,1736	0,1626	0,1523	0,1425	0,1333	0,1247
3	0,4142	0,3954	0,3772	0,3595	0,3423	0,3257	0,3097	0,2942	0,2793	0,2650
4	0,6093	0,5898	0,5704	0,5512	0,5321	0,5132	0,4946	0,4763	0,4582	0,4405
5	0,7693	0,7531	0,7367	0,7199	0,7029	0,6858	0,6684	0,6510	0,6335	0,6160
6	0,8787	0,8675	0,8558	0,8436	0,8311	0,8180	0,8046	0,7908	0,7767	0,7622
7	0,9427	0,9361	0,9290	0,9214	0,9134	0,9050	0,8960	0,8867	0,8769	0,8666
8	0,9755	0,9721	0,9683	0,9642	0,9597	0,9549	0,9497	0,9442	0,9382	0,9319
9	0,9905	0,9889	0,9871	0,9851	0,9829	0,9805	0,9778	0,9749	0,9717	0,9682
10	0,9966	0,9959	0,9952	0,9943	0,9933	0,9922	0,9910	0,9896	0,9880	0,9863
11	0,9989	0,9986	0,9983	0,9980	0,9976	0,9971	0,9966	0,9960	0,9953	0,9945
12	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9992	0,9990	0,9988	0,9986	0,9983	0,9980
13	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993
14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999

	λ									
x	**5,1**	**5,2**	**5,3**	**5,4**	**5,5**	**5,6**	**5,7**	**5,8**	**5,9**	**6,0**
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0372	0,0342	0,0314	0,0289	0,0266	0,0244	0,0224	0,0206	0,0189	0,0174
2	0,1165	0,1088	0,1016	0,0948	0,0884	0,0824	0,0768	0,0715	0,0666	0,0620
3	0,2513	0,2381	0,2254	0,2133	0,2017	0,1906	0,1801	0,1700	0,1604	0,1512
4	0,4231	0,4061	0,3895	0,3733	0,3575	0,3422	0,3272	0,3127	0,2987	0,2851
5	0,5984	0,5809	0,5635	0,5461	0,5289	0,5119	0,4950	0,4783	0,4619	0,4457
6	0,7474	0,7324	0,7171	0,7017	0,6860	0,6703	0,6544	0,6384	0,6224	0,6063
7	0,8560	0,8449	0,8335	0,8217	0,8095	0,7970	0,7842	0,7710	0,7576	0,7440
8	0,9252	0,9181	0,9106	0,9027	0,8944	0,8857	0,8766	0,8672	0,8574	0,8472
9	0,9644	0,9603	0,9559	0,9512	0,9462	0,9409	0,9352	0,9292	0,9228	0,9161
10	0,9844	0,9823	0,9800	0,9775	0,9747	0,9718	0,9686	0,9651	0,9614	0,9574
11	0,9937	0,9927	0,9916	0,9904	0,9890	0,9875	0,9859	0,9841	0,9821	0,9799
12	0,9976	0,9972	0,9967	0,9962	0,9955	0,9949	0,9941	0,9932	0,9922	0,9912
13	0,9992	0,9990	0,9988	0,9986	0,9983	0,9980	0,9977	0,9973	0,9969	0,9964
14	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991	0,9990	0,9988	0,9986
15	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9996	0,9996	0,9995
16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999

	λ									
x	**6,1**	**6,2**	**6,3**	**6,4**	**6,5**	**6,6**	**6,7**	**6,8**	**6,9**	**7,0**
0	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0159	0,0146	0,0134	0,0123	0,0113	0,0103	0,0095	0,0087	0,0080	0,0073
2	0,0577	0,0536	0,0498	0,0463	0,0430	0,0400	0,0371	0,0344	0,0320	0,0296
3	0,1425	0,1342	0,1264	0,1189	0,1119	0,1052	0,0988	0,0928	0,0871	0,0818
4	0,2719	0,2592	0,2469	0,2351	0,2237	0,2127	0,2022	0,1920	0,1823	0,1730
5	0,4298	0,4141	0,3988	0,3837	0,3690	0,3547	0,3407	0,3270	0,3137	0,3007
6	0,5902	0,5742	0,5582	0,5423	0,5265	0,5108	0,4953	0,4799	0,4647	0,4497
7	0,7301	0,7160	0,7018	0,6873	0,6728	0,6581	0,6433	0,6285	0,6136	0,5987
8	0,8367	0,8259	0,8148	0,8033	0,7916	0,7796	0,7673	0,7548	0,7420	0,7291
9	0,9090	0,9016	0,8939	0,8858	0,8774	0,8686	0,8596	0,8502	0,8405	0,8305
10	0,9531	0,9486	0,9437	0,9386	0,9332	0,9274	0,9214	0,9151	0,9084	0,9015
11	0,9776	0,9750	0,9723	0,9693	0,9661	0,9627	0,9591	0,9552	0,9510	0,9467
12	0,9900	0,9887	0,9873	0,9857	0,9840	0,9821	0,9801	0,9779	0,9755	0,9730
13	0,9958	0,9952	0,9945	0,9937	0,9929	0,9920	0,9909	0,9898	0,9885	0,9872
14	0,9984	0,9981	0,9978	0,9974	0,9970	0,9966	0,9961	0,9956	0,9950	0,9943
15	0,9994	0,9993	0,9992	0,9990	0,9988	0,9986	0,9984	0,9982	0,9979	0,9976
16	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9990
17	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	λ									
x	**7,1**	**7,2**	**7,3**	**7,4**	**7,5**	**7,6**	**7,7**	**7,8**	**7,9**	**8,0**
0	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
1	0,0067	0,0061	0,0056	0,0051	0,0047	0,0043	0,0039	0,0036	0,0033	0,0030
2	0,0275	0,0255	0,0236	0,0219	0,0203	0,0188	0,0174	0,0161	0,0149	0,0138
3	0,0767	0,0719	0,0674	0,0632	0,0591	0,0554	0,0518	0,0485	0,0453	0,0424
4	0,1641	0,1555	0,1473	0,1395	0,1321	0,1249	0,1181	0,1117	0,1055	0,0996
5	0,2881	0,2759	0,2640	0,2526	0,2414	0,2307	0,2203	0,2103	0,2006	0,1912
6	0,4349	0,4204	0,4060	0,3920	0,3782	0,3646	0,3514	0,3384	0,3257	0,3134
7	0,5838	0,5689	0,5541	0,5393	0,5246	0,5100	0,4956	0,4812	0,4670	0,4530
8	0,7160	0,7027	0,6892	0,6757	0,6620	0,6482	0,6343	0,6204	0,6065	0,5926
9	0,8202	0,8097	0,7988	0,7877	0,7764	0,7649	0,7531	0,7411	0,7290	0,7166
10	0,8942	0,8867	0,8788	0,8707	0,8622	0,8535	0,8445	0,8352	0,8257	0,8159
11	0,9420	0,9371	0,9319	0,9265	0,9208	0,9148	0,9085	0,9020	0,8952	0,8881
12	0,9703	0,9673	0,9642	0,9609	0,9573	0,9536	0,9496	0,9454	0,9409	0,9362
13	0,9857	0,9841	0,9824	0,9805	0,9784	0,9762	0,9739	0,9714	0,9687	0,9658
14	0,9935	0,9927	0,9918	0,9908	0,9897	0,9886	0,9873	0,9859	0,9844	0,9827
15	0,9972	0,9969	0,9964	0,9959	0,9954	0,9948	0,9941	0,9934	0,9926	0,9918
16	0,9989	0,9987	0,9985	0,9983	0,9980	0,9978	0,9974	0,9971	0,9967	0,9963
17	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9991	0,9989	0,9988	0,9986	0,9984
18	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993
19	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

					λ					
x	**8,1**	**8,2**	**8,3**	**8,4**	**8,5**	**8,6**	**8,7**	**8,8**	**8,9**	**9,0**
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015	0,0014	0,0012
2	0,0127	0,0118	0,0109	0,0100	0,0093	0,0086	0,0079	0,0073	0,0068	0,0062
3	0,0396	0,0370	0,0346	0,0323	0,0301	0,0281	0,0262	0,0244	0,0228	0,0212
4	0,0941	0,0887	0,0837	0,0789	0,0744	0,0701	0,0660	0,0621	0,0584	0,0550
5	0,1823	0,1736	0,1653	0,1573	0,1496	0,1422	0,1352	0,1284	0,1219	0,1157
6	0,3013	0,2896	0,2781	0,2670	0,2562	0,2457	0,2355	0,2256	0,2160	0,2068
7	0,4391	0,4254	0,4119	0,3987	0,3856	0,3728	0,3602	0,3478	0,3357	0,3239
8	0,5786	0,5647	0,5508	0,5369	0,5231	0,5094	0,4958	0,4823	0,4689	0,4557
9	0,7041	0,6915	0,6788	0,6659	0,6530	0,6400	0,6269	0,6137	0,6006	0,5874
10	0,8058	0,7956	0,7850	0,7743	0,7634	0,7522	0,7409	0,7294	0,7178	0,7060
11	0,8807	0,8731	0,8652	0,8571	0,8487	0,8400	0,8311	0,8220	0,8126	0,8030
12	0,9313	0,9261	0,9207	0,9150	0,9091	0,9029	0,8965	0,8898	0,8829	0,8758
13	0,9628	0,9595	0,9561	0,9524	0,9486	0,9445	0,9403	0,9358	0,9311	0,9262
14	0,9810	0,9791	0,9771	0,9749	0,9726	0,9701	0,9675	0,9647	0,9617	0,9585
15	0,9908	0,9898	0,9887	0,9875	0,9862	0,9848	0,9832	0,9816	0,9798	0,9780
16	0,9958	0,9953	0,9947	0,9941	0,9934	0,9926	0,9918	0,9909	0,9899	0,9889
17	0,9982	0,9979	0,9977	0,9973	0,9970	0,9966	0,9962	0,9957	0,9952	0,9947
18	0,9992	0,9991	0,9990	0,9989	0,9987	0,9985	0,9983	0,9981	0,9978	0,9976
19	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9991	0,9989
20	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996
21	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

					λ					
x	**9,1**	**9,2**	**9,3**	**9,4**	**9,5**	**9,6**	**9,7**	**9,8**	**9,9**	**10,0**
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0011	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005
2	0,0058	0,0053	0,0049	0,0045	0,0042	0,0038	0,0035	0,0033	0,0030	0,0028
3	0,0198	0,0184	0,0172	0,0160	0,0149	0,0138	0,0129	0,0120	0,0111	0,0103
4	0,0517	0,0486	0,0456	0,0429	0,0403	0,0378	0,0355	0,0333	0,0312	0,0293
5	0,1098	0,1041	0,0987	0,0935	0,0885	0,0838	0,0793	0,0750	0,0710	0,0671
6	0,1978	0,1892	0,1808	0,1727	0,1650	0,1575	0,1502	0,1433	0,1366	0,1301
7	0,3123	0,3010	0,2900	0,2792	0,2687	0,2584	0,2485	0,2388	0,2294	0,2202
8	0,4426	0,4296	0,4168	0,4042	0,3918	0,3796	0,3676	0,3558	0,3442	0,3328
9	0,5742	0,5611	0,5480	0,5349	0,5218	0,5089	0,4960	0,4832	0,4705	0,4579
10	0,6941	0,6820	0,6699	0,6576	0,6453	0,6330	0,6205	0,6081	0,5956	0,5830
11	0,7932	0,7832	0,7730	0,7626	0,7520	0,7412	0,7303	0,7193	0,7081	0,6968
12	0,8684	0,8607	0,8529	0,8448	0,8364	0,8279	0,8191	0,8101	0,8009	0,7916
13	0,9210	0,9156	0,9100	0,9042	0,8981	0,8919	0,8853	0,8786	0,8716	0,8645
14	0,9552	0,9517	0,9480	0,9441	0,9400	0,9357	0,9312	0,9265	0,9216	0,9165
15	0,9760	0,9738	0,9715	0,9691	0,9665	0,9638	0,9609	0,9579	0,9546	0,9513
16	0,9878	0,9865	0,9852	0,9838	0,9823	0,9806	0,9789	0,9770	0,9751	0,9730
17	0,9941	0,9934	0,9927	0,9919	0,9911	0,9902	0,9892	0,9881	0,9870	0,9857
18	0,9973	0,9969	0,9966	0,9962	0,9957	0,9952	0,9947	0,9941	0,9935	0,9928
19	0,9988	0,9986	0,9985	0,9983	0,9980	0,9978	0,9975	0,9972	0,9969	0,9965
20	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9991	0,9990	0,9989	0,9987	0,9986	0,9984
21	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996	0,9995	0,9995	0,9994	0,9993
22	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

					λ					
x	**11,0**	**12,0**	**13,0**	**14,0**	**15,0**	**16,0**	**17,0**	**18,0**	**19,0**	**20,0**
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0012	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0049	0,0023	0,0011	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0151	0,0076	0,0037	0,0018	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0375	0,0203	0,0107	0,0055	0,0028	0,0014	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001
6	0,0786	0,0458	0,0259	0,0142	0,0076	0,0040	0,0021	0,0010	0,0005	0,0003
7	0,1432	0,0895	0,0540	0,0316	0,0180	0,0100	0,0054	0,0029	0,0015	0,0008
8	0,2320	0,1550	0,0998	0,0621	0,0374	0,0220	0,0126	0,0071	0,0039	0,0021
9	0,3405	0,2424	0,1658	0,1094	0,0699	0,0433	0,0261	0,0154	0,0089	0,0050
10	0,4599	0,3472	0,2517	0,1757	0,1185	0,0774	0,0491	0,0304	0,0183	0,0108
11	0,5793	0,4616	0,3532	0,2600	0,1848	0,1270	0,0847	0,0549	0,0347	0,0214
12	0,6887	0,5760	0,4631	0,3585	0,2676	0,1931	0,1350	0,0917	0,0606	0,0390
13	0,7813	0,6815	0,5730	0,4644	0,3632	0,2745	0,2009	0,1426	0,0984	0,0661
14	0,8540	0,7720	0,6751	0,5704	0,4657	0,3675	0,2808	0,2081	0,1497	0,1049
15	0,9074	0,8444	0,7636	0,6694	0,5681	0,4667	0,3715	0,2867	0,2148	0,1565
16	0,9441	0,8987	0,8355	0,7559	0,6641	0,5660	0,4677	0,3751	0,2920	0,2211
17	0,9678	0,9370	0,8905	0,8272	0,7489	0,6593	0,5640	0,4686	0,3784	0,2970
18	0,9823	0,9626	0,9302	0,8826	0,8195	0,7423	0,6550	0,5622	0,4695	0,3814
19	0,9907	0,9787	0,9573	0,9235	0,8752	0,8122	0,7363	0,6509	0,5606	0,4703
20	0,9953	0,9884	0,9750	0,9521	0,9170	0,8682	0,8055	0,7307	0,6472	0,5591
21	0,9977	0,9939	0,9859	0,9712	0,9469	0,9108	0,8615	0,7991	0,7255	0,6437
22	0,9990	0,9970	0,9924	0,9833	0,9673	0,9418	0,9047	0,8551	0,7931	0,7206
23	0,9995	0,9985	0,9960	0,9907	0,9805	0,9633	0,9367	0,8989	0,8490	0,7875
24	0,9998	0,9993	0,9980	0,9950	0,9888	0,9777	0,9594	0,9317	0,8933	0,8432
25	0,9999	0,9997	0,9990	0,9974	0,9938	0,9869	0,9748	0,9554	0,9269	0,8878
26	1,0000	0,9999	0,9995	0,9987	0,9967	0,9925	0,9848	0,9718	0,9514	0,9221
27	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9983	0,9959	0,9912	0,9827	0,9687	0,9475
28	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9978	0,9950	0,9897	0,9805	0,9657
29	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9989	0,9973	0,9941	0,9882	0,9782
30	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9986	0,9967	0,9930	0,9865
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9993	0,9982	0,9960	0,9919
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9978	0,9953
33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9988	0,9973
34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9985
35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992
36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999

TABLA C. Valores de la distribución acumulativa normal estándar

$$P(Z \leq z) = F(z;0;1)$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9716	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

TABLA D. Valores de cuantiles de la distribución T de Student

n-1	$t_{0,001}$	$t_{0,005}$	$t_{0,010}$	$t_{0,025}$	$t_{0,050}$	$t_{0,100}$	$t_{0,200}$	$t_{0,800}$	$t_{0,900}$	$t_{0,950}$	$t_{0,975}$	$t_{0,990}$	$t_{0,995}$	$t_{0,999}$
1	-318,309	-63,657	-31,821	-12,706	-6,314	-3,078	-1,376	1,376	3,078	6,314	12,706	31,820	63,656	318,294
2	-22,327	-9,925	-6,965	-4,303	-2,920	-1,886	-1,061	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	-10,215	-5,841	-4,541	-3,182	-2,353	-1,638	-0,978	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	-7,173	-4,604	-3,747	-2,776	-2,132	-1,533	-0,941	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	-5,893	-4,032	-3,365	-2,571	-2,015	-1,476	-0,920	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	-5,208	-3,707	-3,143	-2,447	-1,943	-1,440	-0,906	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	-4,785	-3,499	-2,998	-2,365	-1,895	-1,415	-0,896	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	-4,501	-3,355	-2,896	-2,306	-1,860	-1,397	-0,889	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	-4,297	-3,250	-2,821	-2,262	-1,833	-1,383	-0,883	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	-4,144	-3,169	-2,764	-2,228	-1,812	-1,372	-0,879	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	-4,025	-3,106	-2,718	-2,201	-1,796	-1,363	-0,876	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	-3,930	-3,055	-2,681	-2,179	-1,782	-1,356	-0,873	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	-3,852	-3,012	-2,650	-2,160	-1,771	-1,350	-0,870	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	-3,787	-2,977	-2,624	-2,145	-1,761	-1,345	-0,868	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	-3,733	-2,947	-2,602	-2,131	-1,753	-1,341	-0,866	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	-3,686	-2,921	-2,583	-2,120	-1,746	-1,337	-0,865	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	-3,646	-2,898	-2,567	-2,110	-1,740	-1,333	-0,863	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	-3,610	-2,878	-2,552	-2,101	-1,734	-1,330	-0,862	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	-3,579	-2,861	-2,539	-2,093	-1,729	-1,328	-0,861	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	-3,552	-2,845	-2,528	-2,086	-1,725	-1,325	-0,860	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	-3,527	-2,831	-2,518	-2,080	-1,721	-1,323	-0,859	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	-3,505	-2,819	-2,508	-2,074	-1,717	-1,321	-0,858	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	-3,485	-2,807	-2,500	-2,069	-1,714	-1,319	-0,858	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	-3,467	-2,797	-2,492	-2,064	-1,711	-1,318	-0,857	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	-3,450	-2,787	-2,485	-2,060	-1,708	-1,316	-0,856	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	-3,435	-2,779	-2,479	-2,056	-1,706	-1,315	-0,856	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	-3,421	-2,771	-2,473	-2,052	-1,703	-1,314	-0,855	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	-3,408	-2,763	-2,467	-2,048	-1,701	-1,313	-0,855	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	-3,396	-2,756	-2,462	-2,045	-1,699	-1,311	-0,854	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	-3,385	-2,750	-2,457	-2,042	-1,697	-1,310	-0,854	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
35	-3,340	-2,724	-2,438	-2,030	-1,690	-1,306	-0,852	0,852	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340
40	-3,307	-2,704	-2,423	-2,021	-1,684	-1,303	-0,851	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
45	-3,281	-2,690	-2,412	-2,014	-1,679	-1,301	-0,850	0,850	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281
50	-3,261	-2,678	-2,403	-2,009	-1,676	-1,299	-0,849	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	-3,232	-2,660	-2,390	-2,000	-1,671	-1,296	-0,848	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
70	-3,211	-2,648	-2,381	-1,994	-1,667	-1,294	-0,847	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
80	-3,195	-2,639	-2,374	-1,990	-1,664	-1,292	-0,846	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
90	-3,183	-2,632	-2,369	-1,987	-1,662	-1,291	-0,846	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
100	-3,174	-2,626	-2,364	-1,984	-1,660	-1,290	-0,845	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
200	-3,131	-2,601	-2,345	-1,972	-1,652	-1,286	-0,843	0,843	1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131
500	-3,107	-2,586	-2,334	-1,965	-1,648	-1,283	-0,842	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107
1000	-3,098	-2,581	-2,330	-1,962	-1,646	-1,282	-0,842	0,842	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098

TABLA E. Valores de cuantiles de la distribución Chi cuadrada

n-1	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,64	7,90
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,60	5,99	7,38	9,22	10,59
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,82	9,36	11,32	12,82
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,15	13,28	14,82
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,84	15,09	16,76
6	0,67	0,87	1,24	1,63	2,20	10,65	12,60	14,46	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,02	18,47	20,27
8	1,34	1,64	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,55	20,08	21,94
9	1,73	2,09	2,70	3,32	4,17	14,69	16,93	19,03	21,65	23,56
10	2,15	2,55	3,24	3,94	4,86	15,99	18,31	20,50	23,19	25,15
11	2,60	3,05	3,81	4,57	5,58	17,28	19,68	21,93	24,75	26,71
12	3,06	3,57	4,40	5,22	6,30	18,55	21,03	23,35	26,25	28,25
13	3,56	4,10	5,01	5,89	7,04	19,81	22,37	24,75	27,72	29,88
14	4,07	4,65	5,62	6,57	7,79	21,07	23,69	26,13	29,17	31,38
15	4,59	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,50	30,61	32,86
16	5,14	5,81	6,90	7,96	9,31	23,55	26,30	28,86	32,03	34,32
17	5,69	6,40	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,20	33,43	35,77
18	6,25	7,00	8,23	9,39	10,86	25,99	28,88	31,54	34,83	37,21
19	6,82	7,63	8,90	10,11	11,65	27,21	30,15	32,87	36,22	38,63
20	7,42	8,25	9,59	10,85	12,44	28,42	31,42	34,18	37,59	40,05
21	8,02	8,89	10,28	11,59	13,24	29,62	32,68	35,49	38,96	41,45
22	8,62	9,53	10,98	12,34	14,04	30,82	33,93	36,79	40,31	42,84
23	9,25	10,19	11,69	13,09	14,85	32,01	35,18	38,09	41,66	44,23
24	9,87	10,85	12,40	13,84	15,66	33,20	36,42	39,38	43,00	45,60
25	10,50	11,51	13,11	14,61	16,47	34,38	37,66	40,66	44,34	46,97
26	11,13	12,19	13,84	15,38	17,29	35,57	38,89	41,94	45,66	48,33
27	11,79	12,87	14,57	16,15	18,11	36,74	40,12	43,21	46,99	49,69
28	12,44	13,55	15,30	16,92	18,94	37,92	41,34	44,47	48,30	51,04
29	13,09	14,24	16,04	17,70	19,77	39,09	42,56	45,74	49,61	52,38
30	13,77	14,94	16,78	18,49	20,60	40,26	43,78	46,99	50,91	53,71
35	17,16	18,49	20,56	22,46	24,79	46,06	49,81	53,22	57,36	60,31
40	20,67	22,14	24,42	26,51	29,06	51,80	55,75	59,34	63,71	66,80
45	24,28	25,88	28,36	30,61	33,36	57,50	61,65	65,41	69,98	73,20
50	27,96	29,68	32,35	34,76	37,69	63,16	67,50	71,42	76,17	79,52
60	35,50	37,46	40,47	43,19	46,46	74,39	79,08	83,30	88,40	91,98
70	43,25	45,42	48,75	51,74	55,33	85,52	90,53	95,03	100,44	104,24
80	51,14	53,52	57,15	60,39	64,28	96,57	101,88	106,63	112,34	116,35
90	59,17	61,74	65,64	69,13	73,29	107,56	113,14	118,14	124,13	128,32
100	67,30	70,05	74,22	77,93	82,36	118,49	124,34	129,56	135,82	140,19

TABLA F. Valores de cuantiles de la distribución F

$1-\alpha=0.90$

n_1-1= grados de libertad del numerador

n_2-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1000
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,47	60,71	61,22	61,74	62,06	62,26	62,53	62,69	63,00	63,29
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22	5,20	5,19	5,17	5,17	5,16	5,15	5,14	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,80	3,78	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,15	3,13	3,11
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90	2,87	2,84	2,81	2,80	2,78	2,77	2,75	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,79	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67	2,63	2,59	2,57	2,56	2,54	2,52	2,50	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,35	2,32	2,30
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,22	2,19	2,16
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28	2,24	2,20	2,17	2,16	2,13	2,12	2,09	2,06
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,04	2,00	1,98
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15	2,10	2,06	2,03	2,01	1,99	1,97	1,94	1,91
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,12	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,92	1,88	1,85
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,07	2,05	2,01	1,96	1,93	1,91	1,89	1,87	1,83	1,80
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	1,97	1,92	1,89	1,87	1,85	1,83	1,79	1,76
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,01	1,99	1,94	1,89	1,86	1,84	1,81	1,79	1,76	1,72
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96	1,91	1,86	1,83	1,81	1,78	1,76	1,73	1,69
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	1,89	1,84	1,80	1,78	1,75	1,74	1,70	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,93	1,91	1,86	1,81	1,78	1,76	1,73	1,71	1,67	1,64
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,91	1,89	1,84	1,79	1,76	1,74	1,71	1,69	1,65	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,90	1,87	1,83	1,78	1,74	1,72	1,69	1,67	1,63	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,65	1,61	1,57
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,87	1,84	1,80	1,74	1,71	1,69	1,66	1,64	1,59	1,55
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,62	1,58	1,54
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,84	1,82	1,77	1,72	1,68	1,66	1,63	1,61	1,56	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,83	1,81	1,76	1,71	1,67	1,65	1,61	1,59	1,55	1,51
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,82	1,80	1,75	1,70	1,66	1,64	1,60	1,58	1,54	1,50
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79	1,74	1,69	1,65	1,63	1,59	1,57	1,53	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,80	1,78	1,73	1,68	1,64	1,62	1,58	1,56	1,52	1,47
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77	1,72	1,67	1,63	1,61	1,57	1,55	1,51	1,46
35	2,85	2,46	2,25	2,11	2,02	1,95	1,90	1,85	1,82	1,79	1,76	1,74	1,69	1,63	1,60	1,57	1,53	1,51	1,47	1,42
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,74	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,48	1,43	1,38
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,84	1,80	1,76	1,73	1,70	1,68	1,63	1,57	1,53	1,50	1,46	1,44	1,39	1,33
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,68	1,66	1,60	1,54	1,50	1,48	1,44	1,41	1,36	1,30
80	2,77	2,37	2,15	2,02	1,92	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68	1,65	1,63	1,57	1,51	1,47	1,44	1,40	1,38	1,32	1,25
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66	1,64	1,61	1,56	1,49	1,45	1,42	1,38	1,35	1,29	1,22
200	2,73	2,33	2,11	1,97	1,88	1,80	1,75	1,70	1,66	1,63	1,60	1,58	1,52	1,46	1,41	1,38	1,34	1,31	1,24	1,16
500	2,72	2,31	2,09	1,96	1,86	1,79	1,73	1,68	1,64	1,61	1,58	1,56	1,50	1,44	1,39	1,36	1,31	1,28	1,21	1,11
1000	2,71	2,31	2,09	1,95	1,85	1,78	1,72	1,68	1,64	1,61	1,58	1,55	1,49	1,43	1,38	1,35	1,30	1,27	1,20	1,08

$1-\alpha=0.95$

n_1-1= grados de libertad del numerador

n_2-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1000
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	242,98	243,91	245,96	248,01	249,26	250,08	251,15	251,77	253,01	254,17
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,63	8,62	8,59	8,58	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,97	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,70	5,72	5,70	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,73	4,70	4,68	4,62	4,56	4,52	4,50	4,46	4,44	4,41	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,40	3,38	3,34	3,32	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,11	3,08	3,04	3,02	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,89	2,86	2,83	2,80	2,76	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,73	2,70	2,66	2,64	2,59	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,46	2,41
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,50	2,47	2,43	2,40	2,35	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,41	2,38	2,34	2,31	2,26	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,34	2,31	2,27	2,24	2,19	2,14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,40	2,33	2,28	2,25	2,20	2,18	2,12	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,23	2,19	2,15	2,12	2,07	2,02
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,18	2,15	2,10	2,08	2,02	1,97
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,14	2,11	2,06	2,04	1,98	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,94	1,88

20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,07	2,04	1,99	1,97	1,91	1,85
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,88	1,82
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,15	2,07	2,02	1,98	1,94	1,91	1,85	1,79
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,13	2,05	2,00	1,96	1,91	1,88	1,82	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,11	2,03	1,97	1,94	1,89	1,86	1,80	1,74
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,84	1,78	1,72
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,07	1,99	1,94	1,90	1,85	1,82	1,76	1,70
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,06	1,97	1,92	1,88	1,84	1,81	1,74	1,68
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,73	1,66
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,03	1,94	1,89	1,85	1,81	1,77	1,71	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,88	1,84	1,79	1,76	1,70	1,63
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	1,96	1,88	1,82	1,79	1,74	1,70	1,63	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,78	1,74	1,69	1,66	1,59	1,52
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,87	1,78	1,73	1,69	1,63	1,60	1,52	1,45
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,69	1,65	1,59	1,56	1,48	1,40
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,79	1,70	1,64	1,60	1,54	1,51	1,43	1,34
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,77	1,68	1,62	1,57	1,52	1,48	1,39	1,30
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80	1,72	1,62	1,56	1,52	1,46	1,41	1,32	1,21
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,77	1,69	1,59	1,53	1,48	1,42	1,38	1,28	1,14
1000	3,85	3,01	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76	1,68	1,58	1,52	1,47	1,41	1,36	1,26	1,11

$1-\alpha=0.99$

n_1-1= grados de libertad del numerador

n_2-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1000
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42	99,43	99,45	99,46	99,46	99,47	99,48	99,49	99,51
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,50	27,34	27,22	27,12	27,03	26,85	26,67	26,58	26,50	26,41	26,35	26,24	26,14
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,19	14,02	13,91	13,84	13,75	13,69	13,58	13,48
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,72	9,55	9,45	9,38	9,30	9,24	9,13	9,03
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,56	7,40	7,29	7,23	7,15	7,09	6,99	6,89
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,31	6,16	6,06	5,99	5,91	5,86	5,75	5,66
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,52	5,36	5,26	5,20	5,12	5,07	4,96	4,87
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	4,96	4,81	4,71	4,65	4,57	4,52	4,41	4,32
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,56	4,41	4,31	4,25	4,17	4,12	4,01	3,92
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,25	4,10	4,00	3,94	3,86	3,81	3,71	3,61
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,01	3,86	3,76	3,70	3,62	3,57	3,47	3,37
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,82	3,66	3,57	3,51	3,43	3,38	3,27	3,18
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,66	3,51	3,41	3,35	3,27	3,22	3,11	3,02
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,52	3,37	3,28	3,21	3,13	3,08	2,98	2,88
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,41	3,26	3,16	3,10	3,02	2,97	2,86	2,76
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,31	3,16	3,07	3,00	2,92	2,87	2,76	2,66
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,23	3,08	2,98	2,92	2,84	2,78	2,68	2,58
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,15	3,00	2,91	2,84	2,76	2,71	2,60	2,50
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,09	2,94	2,84	2,78	2,69	2,64	2,54	2,43
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	3,03	2,88	2,78	2,72	2,64	2,58	2,48	2,37
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	2,98	2,83	2,73	2,67	2,58	2,53	2,42	2,32
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	2,93	2,78	2,69	2,62	2,54	2,48	2,37	2,27
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,89	2,74	2,64	2,58	2,49	2,44	2,33	2,22
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,85	2,70	2,60	2,54	2,45	2,40	2,29	2,18
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,81	2,66	2,57	2,50	2,42	2,36	2,25	2,14
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93	2,78	2,63	2,54	2,47	2,38	2,33	2,22	2,11
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,75	2,60	2,51	2,44	2,35	2,30	2,19	2,08
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87	2,73	2,57	2,48	2,41	2,33	2,27	2,16	2,05
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,70	2,55	2,45	2,39	2,30	2,24	2,13	2,02
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74	2,60	2,44	2,35	2,28	2,19	2,14	2,02	1,90
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,52	2,37	2,27	2,20	2,11	2,06	1,94	1,82
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,62	2,56	2,42	2,27	2,17	2,10	2,01	1,95	1,82	1,70
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,35	2,20	2,10	2,03	1,94	1,88	1,75	1,62
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42	2,27	2,12	2,01	1,94	1,85	1,79	1,65	1,51
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37	2,22	2,07	1,97	1,89	1,80	1,74	1,60	1,45
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27	2,13	1,97	1,87	1,79	1,69	1,63	1,48	1,30
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22	2,07	1,92	1,81	1,74	1,63	1,57	1,41	1,20
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2,20	2,06	1,90	1,79	1,72	1,61	1,54	1,38	1,16

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA ESTATAL DEL CARCHI

UPEC

Educación para el Desarrollo y la Integración

ISBN: 978-9942-914-68-2

9789942914682

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA ESTATAL DEL CARCHI
Calle Antisana y Av. Universitaria.
Tels.: 06 2 224 079 / 06 2 224 080 / 06 2 224 081
Tulcán Ecuador
Email: publicacionesupec@upec.edu.ec
www.upec.edu.ec